This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

SAGGIO

D'UN

TRATTATO GENERALE

DI

TRIGONOMETRIA

OVE SI ESPONGONO I PRINCIPJ FONDAMENTALI DELL'APPLICAZIONE DELL'ALGEBRA ALLA GEOMETRIA, I PRINCIPJ TEORICI DELLA TRIGONOMETRIA RETTILINEA E SFERICA, ED I LORO USI NELL'ALGEBRA, NELLA GEODESIA, E NELL'ASTRONOMIA.

DI

F. CORRIDI

PROFESSORE DI GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA
NELL' I. E R. UNIVERSITA' DI PISA

TOMO I.

PISA

PRESSO N. CAPURRO E COMP.

MDCCCXXXIV.

183. e. 13.

BIBLIOTHECA BODLEIANA

PRINCIPJ TEORICI

DELLA

TRIGONOMETRIA

RETTILINEA E SFERICA

PRECEDUTI DAI PRINCIPJ FONDAMENTALI DELL'APPLICAZIONE DELL'ALGEBRA ALLA GEOMETRIA, E SEGUITI DA UN'APPENDICE IN CUI SI ESPONE LA TEORIA ANALITICA DEI LOGARITMI.

DI

F. CORRIDI

PROFESSORE DI GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA

NELL'I. E R. UNIVERSITA' DI PISA

PISA

PRESSO N. CAPURRO E COMP.

MDCCCXXXIV.

nel quale sarebbe lungamente rimasta, se da Voi non erano chiamati gli esperti nell'arte a farla di pubblica ragione, e se non aveste di cura e larghi dispendj dato soccorso all' impresa; una Miniera di combustibile fossile aperta per opera Vostra nella valle di Luni, e per cui novello incremento verrà all' industria della Penisola, sono due fatti che onorano bastevolmente un nome, e che più dicono d' ogni parola.

Godo nell' animo di tributare quest' omaggio al vero, fidato che la pochezza del dono sia sovvenuta dalla sincerità de' sentimenti.

Con tutta la stima mi protesto

Di Voi, rispettabilissimo Signore,

Pisa 5 Marzo 1834.

Devotiss. Servitore, e Cordialiss. Amico
FILIPPO CORRIDI.

PREFAZIONE

Ogni scienza, essendo costituita di principj, ed avendo una forma assegnata dal metodo che li coordina, va di continuo soggetta a due principali mutamenti: perocchè varia talora rispetto ai principj, tal'altra rispetto al metodo della loro associazione. Quindi parmi potersi arrecare alcuna utilità alle scienze o perfezionandone il metodo, o instituendo indagini che guidino a nuove scoperte. Con queste si giova alle scienze trovando principj nuovi, generalizzandone alcuni tenuti per ispeciali, riconoscendo l'errore di altri avuti per inconcussi, e riformandoli convenientemente. Col perfezionamento del metodo poi si vantaggiano le scienze riordinando i principj, acciocchè scorgasi vie meglio il fine cui sono diretti, uniformandoli alle nuove scoperte, e subordinando la loro sistematica associazione alla logica naturale della mente umana con evitare gli artificj del raziocinio. I sommi ingegni avanzano le scienze colle nuove scoperte: coloro

poi che per ufficio ammaestrano la gioventù, debbono, ove altro non possano, emendare il metodo per ogni modo onde si appiani la via degli studj, nel che consiste il supremo fine del metodo stesso.

Tale essendo il mio consiglio ho preso ad esporre in questo *Saggio* le dottrine trigonometriche coordinandole in maniera da renderne lo studio facile a un tempo e dilettevole. A ciò m'incoraggiarono i recenti avanzamenti delle scienze esatte, pei quali la Trigonometria e le dottrine che ne derivano vedonsi notabilmente accresciute. E a dir vero di tanto si è arricchita la Matematica che al presente tempo vien reclamata l'opera di coloro cui ne è commesso l'insegnamento, affinchè la gioventù a più amplj e meglio ordinati studj sia indirizzata in questa parte dello scibile umano. Per la qual cosa, non avendo ristrette le mie cure soltanto al metodo, è stato mio proposito di formare un trattato in cui la Trigonometria venisse esposta in tutte le sue particolarità, e nelle sue principali applicazioni coerentemente alle più moderne teorie. Lontano però dal presumere che l'opera mia abbia corrisposto al divisamento, ho creduto che questo tentativo niun altro titolo potesse idoneamente comportare, che quello di *Saggio d'un trattato generale di Trigonometria*.

Mi giova avvertire che volendo rendere questo *Saggio* idoneo ancora alle mie lezioni, rispetto alle quali

mi è forza ristringere la materia in angustissimi limiti ho stimato conveniente di esporre le teorie in tale ordine che a prima vista potrebbe sembrare inopportuno.

Per servire adunque a questa sua particolare destinazione il *Saggio* trovasi diviso in due tomi. Il primo comprende la Trigonometria elementare, e questo è il testo delle mie lezioni. Il secondo comprende gli usi della Trigonometria nell' Algebra, e le sue applicazioni all' Astronomia, alla Geodesia ed alla Gnomonica. In esso perciò si troveranno la teoria generale delle funzioni circolari, la risoluzione delle equazioni per mezzo della tavola dei seni, la risoluzione dei triangoli effettuata col soccorso delle serie trigonometriche; l'esposizione dei metodi relativi alla misura delle distanze terrestri e celesti, alla costruzione delle mappe, alle livellazioni; l'uso degli gnomoni, ec. Però può dirsi che il tomo secondo abbia per ispeciale oggetto l'istruzione di coloro che aspirano al grado d'ingegnere architetto. Ma di ciò si rende conto esatto nella prefazione del tomo stesso; qui occorre far parola delle cose contenute nel tomo primo.

Le quattro parti di che esso è composto sono precedute dai principj fondamentali dell' applicazione dell' Algebra alla Geometria, pei quali si vuole accennare come l' Algebra si presti ad esprimere le condizioni geometriche, e come geometricamente s'interpretino, e si costruiscano le espressioni algebriche. Il modo di porre in e-

quazione i problemi di Geometria, il principio della omogenità, le costruzioni, e l' ufficio dei segni sono le materie discorse, e che ho divisato di porre in chiara luce.

Mi sembrò che la difficoltà di prescrivere regole generali intorno al modo di tradurre i problemi, avvertita da tutti gli scrittori d' Elementi di Geometria analitica, potesse in parte rimuoversi con distinguere le proprietà delle figure geometriche in *proprietà di situazione*, e *proprietà di grandezza;* poichè osservando che le proprietà di grandezza si risolvono immediatamente in altrettante condizioni aritmetiche, che a proprietà di situazione conseguono proprietà di grandezza, e che i problemi si dividono principalmente in due ordini, secondochè la figura da costruirsi dee corrispondere a proprietà di grandezza o di situazione, viene a tracciarsi gran parte della strada che guida allo scioglimento di qualunque geometrico quesito.

In quanto alla spiegazione dell' ufficio dei segni mi sono attenuto alla teoria delle figure correlative, la quale, ove ancora non bastasse a vincere gli scrupoli di tutti i geometri su tal proposito, è da reputarsi ammirabile tentativo di un sommo ingegno, di che conviene istruire gli studiosi. Più volte mi sono maravigliato meco stesso di non vederla sommariamente esposta nei trattati ad uso delle scuole, mentrechè a dimostrare l'ufficio dei segni si seguono certi altri principj, i quali in

luogo di rischiarare ottenebrano la mente dei principianti. Il Signor Francoeur soltanto si può dire che abbia accennata questa teoria nel suo *Corso di Matematica;* ma per la somma strettezza in che egli si è tenuto, non ha, a dir vero, bastevolmente dichiarato il divisamento dell' illustre autore: io, volendo presentarla in un modo semplice, ho mosse le considerazioni da alcuni particolari, e mi sono gradatamente avanzato ai principj generali, sembrandomi che una tale dimostrazione riuscisse più idonea ai principianti di quella che leggesi nella *Geometria di posizione.*

Venendo ora alla Trigonometria dirò, che nella prima parte dopo avere spiegata l'origine dei seni, e dimostrato il principio della proporzionalità dei lati d' un triangolo coi seni degli angoli opposti, si procede immediatamente alla risoluzione dei triangoli, dimostrando come il solo suddivisato principio sia bastevole ad effettuarla in tutti i possibili casi. Questo abbozzo, per così dire, della Trigonometria dà chiara idea del suo oggetto, de' suoi mezzi, e pone i principianti in istato di apprezzare le susseguenti indagini. Il calcolo della tavola dei seni che quivi solo si accenna, rimettendone gli ulteriori sviluppamenti a luogo più idoneo del trattato, preceduto dalle formule per la moltiplicazione, e divisione degli archi, non presenta al certo veruna difficoltà, come quello che nasce spontaneamente dalle formule stesse. Tutte le formule poi esprimenti le relazioni del-

le rette trigonometriche di uno, o più archi sono state distinte in varj ordini per modo che agevolmente scorgasi la loro più naturale filiazione, e si raccomandino alla memoria per una vera associazione d'idee: non ho tralasciato di avvalorare quelle che piú di frequente vengono in uso, con dimostrazioni geometriche, le quali mentre servono di verificazione, rendono più sensibile la verità, ed ammaestrano la gioventù in quelle sottili argomentazioni degli antichi geometri troppo trascurate ai dì nostri. Si termina la prima parte con sottoporre a nuovo esame la risoluzione dei triangoli, potendosi a questo luogo profittare di tutti i mezzi della Trigonometria per istabilire metodi più semplici di quelli esposti in principio.

La seconda parte si raggira sopra gli usi della Trigonometria nella risoluzione dei problemi, e nella dimostrazione dei teoremi di Geometria. La scelta dei problemi e teoremi è stata fatta per modo che le formule risultanti fossero suscettibili di alcuna utile applicazione, e riuscissero interessanti anche per l'eleganza dei calcoli. Meritano particolare osservazione le proposizioni sopra i poligoni, e quelle sopra le aree; poichè le prime, come si vede ne' quesiti risoluti, servono alla Poligonometria rettilinea, le altre s'impiegano nella Topografia, siccome vedremo a suo luogo, per la misura delle superfici agrarie.

La terza parte comprende la Trigonometria sferica;

quivi dopo avere dimostrate le proprietà dei triangoli sferici si passa alla loro generale risoluzione, la quale vien eseguita in tutti i casi che possono occorrere mediante un solo principio, seguendo la scorta dell'incomparabile Lagrange (*). Qui pure non ho mancato di avvalorare i risultati del calcolo colle geometriche costruzioni, per cui si schiariscono mirabilmente le regole della risoluzione dei triangoli sferici, e si acquista una chiara idea della composizione delle formule ad esse relative.

La quarta parte finalmente può aversi qual'appendice della seconda; essa comprende una serie di problemi sopra i triangoli sferici, i parallelepipedi, e le piramidi; tutti utili, ed interessanti per la semplicità ed eleganza della soluzione.

A queste quattro parti conseguono varie Note, ed un Appendice contenente la teoria elementare dei logaritmi. Avendo tolto ogni esempio numerico dal *Saggio* ho creduto che fosse mio debito aggiungere questa teoria sviluppandola in tutte quelle particolarità che interessano l'uso delle tavole: d'altra parte essendo essa nata per servire specialmente ai calcoli trigonometrici è conveniente che ad un trattato generale di Trigonometria si trovi congiunta; tanto più che non si trascura di far parola dell'uso delle tavole logaritmico-trigonometri-

(*) V. *Journal de l'École polytecnique*, *T. I.*

che, delle quali pure storicamente si tratta, facendo l'enumerazione delle tavole più celebri da Nepero sino all'epoca nostra.

Le Note versano sopra le materie che richiedevano una ulteriore spiegazione, o sopra quelle che non hanno trovato il loro opportuno luogo nel *Saggio*. In esse si troveranno moltissime formule trigonometriche, le quali ove fossero state inserite nel testo, ne avrebbero estesi i capitoli fuor di maniera.

Resta ch' io dica che nella compilazione di questo *Saggio* ho avuto ricorso a quanto scrissero su la Trigonometria Eulero, Lagrange, Cagnoli, Legendre, Franchini, Santini, Develay, Lefébure de Fourcy, ed altri chiari geometri, e se talvolta omessi d'indicare i nomi loro, il feci per servire alla brevità non per appropriarmi le cose da essi somministratemi.

INTRODUZIONE

Principj fondamentali dell'applicazione dell'Algebra alla Geometria.

CAPITOLO I.

Dei problemi geometrici e della omogeneità.

1. Il misurar l'estensione costituisce l'oggetto primario della geometria. Questa operazione che si può fare su l'estensione a una dimensione, o a due, o a tre, cioè su le linee, le superficie ed i solidi, dovette presentare ai primi geometri non lievi difficoltà, ogniqualvolta l'irregolare configurazione della superficie, o del solido da misurarsi, non presentava alcun apparente rapporto colla figura della superficie, o del solido assunto per termine di confronto, cioè preso per unità. Infatti, il misuramento di una superficie, preso per unità un quadrato, consistendo nel determinare quante volte esso sia contenuto nella medesima, se la superficie da misurarsi sarà un rettangolo, l'operazione non presenterà alcuna difficoltà, vedendosi chiaramente la possibile sovrapposizione del quadrato sul rettangolo, stante l'uguaglianza degli angoli di queste figure. Ma se la superficie sarà per esempio un quadrilatero irre-

golare, non potendo i suoi angoli coincidere cogli angoli del quadrato, sarà impossibile effettuar la sovrapposizione e determinar la misura della superficie medesima. Di qui ha origine la necessità di trasformare i poligoni ed in generale le figure irregolari in altre equivalenti e regolari in quel modo che si richiede per misurarli.

Or questa trasformazione dei poligoni in rettangoli equivalenti non potendo dipendere che dalle proprietà di cui godono i poligoni rispetto ai loro angoli e ai loro lati, doveva indurre i geometri ad indagare tali proprietà, prima di procedere alla risoluzione dei problemi relativi alla misura dell' estensione.

2. Queste proprietà sono pertanto quelle che veramente costituiscono l' oggetto più universale della geometria: esse si distinguono in *proprietà di situazione* e *in proprietà di grandezza*.

Le proprietà di situazione sono costituite nella figura dalla posizione respettiva delle sue rette; e conosciute d'altronde, servono a determinare questa posizione, allorchè è incognita. Per esempio il centro di un circolo, allorchè di esso sono date due corde, si trova conducendo sul mezzo di queste due perpendicolari: tal costruzione dipende, come è chiaro, dalla nota proprietà di situazione, che la perpendicolare sul mezzo di una corda passa pel centro del suo arco. La tangente ad un circolo in un punto dato è determinata dalla perpendicolare inalzata sull' estremità del raggio tirato a quel punto; poichè questa perpendicolare gode di tal proprietà di situazione, per cui non ha che il solo punto dato a comune colla circonferenza.

Le proprietà di grandezza sono determinate dalla mutua dipendenza delle lunghezze delle rette costituenti una fi-

gura. Per esempio dalla mutua dipendenza delle lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo deriva la proprietà di grandezza di cui gode questa figura, rispetto ai lati medesimi, in virtù della quale il quadrato fatto sopra l'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati fatti sopra i lati dell'angolo retto. Così ancora la proprietà di grandezza del circolo, per cui ogni corda è media proporzionale fra il diametro ed il segmento adiacente, collega la lunghezza di una data corda, quella del segmento adiacente e quella del diametro.

3. É mirabile poi l'intimo legame che esiste tra le proprietà di situazione e quelle di grandezza; imperocchè quasi costantemente ad ogni proprietà di grandezza in una figura consegue una proprietà di situazione degli elementi che la figura stessa costituiscono; e viceversa. Per esempio se i due lati di un triangolo fossero divisi da una retta in parti proporzionali, essa sarebbe parallela al terzo lato: se i quattro lati di un parallelogrammo fossero uguali, le diagonali del medesimo si taglierebbero ad angoli retti: se la perpendicolare abbassata dal vertice dell'angolo di un triangolo sul lato opposto fosse media proporzionale fra i due segmenti in cui questo lato riman diviso, quell'angolo sarebbe retto. Queste proposizioni dimostrano ad evidenza come posta una proprietà di grandezza, ne derivi talvolta una di situazione.

Vedesi poi facilmente come da proprietà di situazione possano inferirsi proprietà di grandezza. Sappiamo che ne'triangoli simili la proporzionalità dei lati omologhi è una conseguenza dell'uguaglianza degli angoli; che condotte da un medesimo punto una tangente ed una secante al circolo, la tangente risulta media proporzionale fra l'intera

secante e la di lei parte esterna; che la linea retta la quale divide in due parti uguali un angolo di un triangolo divide pure il lato opposto in due parti proporzionali ai lati adiacenti.

4. Qui occorre osservare che nelle proprietà di grandezza la geometria si risolve per modo di dire in aritmetica; perchè siccome le grandezze (sieno queste linee, o superficie, o solidi), allorquando vengono paragonate alla loro respettiva unità diventano numeri, segue che le proprietà delle linee, delle superficie e dei solidi che si riferiscono alla loro grandezza, si traducono naturalmente in altrettante relazioni di numeri, o equazioni da verificarsi per mezzo del calcolo. Essendo in un triangolo i lati dell' angolo retto espressi pei numeri 3 e 4, l' ipotenusa per 5, dovrà essere

$$3^2 + 4^2 = 5^2;$$

questa sarà l' equazione, che verificandosi, comproverà l'esattezza di quei dati. Essendo la corda di un circolo espressa per esempio da 6, il diametro di esso circolo da 18, ed il segmento adiacente alla corda medesima da 2, avremo

$$18 : 6 :: 6 : 2;$$

donde l' equazione

$$6^2 = 18 . 2,$$

che si verifica.

5. Da ciò apparisce che se uno degli elementi che entrano in una proprietà di grandezza, ovvero uno dei numeri in cui essa si traduce fosse ignoto, l'aritmetica servirebbe a determinarlo: suppongasi per esempio che nella prima delle due precedenti equazioni sia ignoto uno dei lati che costituiscono l' angolo retto, e sia l' altro lato espresso per 4 e l'ipotenusa per 5: chiamato x il lato incognito, avremo

$$x^2 + 4^2 = 5^2$$

e quindi

$$x^2 = 25 - 16 = 9, \text{ ed } x = 3.$$

Suppongasi che nella seconda equazione sia ignoto il diametro e che la corda sia espressa da 6 ed il segmento adiacente da 2; chiamato x il numero esprimente il diametro, per determinare x dovremo risolvere l'equazione $6^2 = 2x$, dalla quale ricavasi $x = 18$.

Ecco una idea del modo con cui l'aritmetica può risolvere problemi di geometria; i risultati $x = 3$, $x = 18$ indicano che le rette cercate contengono l'assunta unità di misura respettivamente tre volte e diciotto volte.

6. Poichè dunque la geometria e l'aritmetica hanno sotto questo punto di vista un rapporto comune, si vede che un quesito di geometria, nel quale dalla lunghezza data di più linee di cui sono note le proprietà di grandezza si propone di dedurre la lunghezza d'un'altra linea, si dee poter risolvere per mezzo del calcolo; perchè tradotte queste proprietà in termini generali, cioè in termini algebrici, coi quali si esprimono generalmente le operazioni dell'aritmetica, avremo una equazione tra gli elementi cogniti e l'ignoto; quindi l'ignoto medesimo potrà dedursi senza difficoltà.

7. In applicazione di questi principj prendiamo a risolvere i quesiti seguenti.

I. Essendo dato un triangolo, dividere uno de' suoi lati in due segmenti proporzionali ai quadrati costrutti sopra gli altri lati.

Se i lati del triangolo, riferiti ad una comune unità lineare, risultassero respettivamente espressi pei numeri a, b, c, e se il lato da dividersi fosse quello espresso per a, l'elemento incognito sarebbe manifestamente una delle due par-

ti proporzionali ai quadrati b^2 e c^2, nelle quali dobbiamo dividere il numero a. Espressa questa parte incognita per x, l'altra si esprimerà per $a - x$, e l'equazione in cui si traduce una tal condizione sarà

$$b^2 : c^2 :: a - x : x$$

donde

$$b^2 x = a c^2 - c^2 x$$

e quindi

$$x = \frac{a c^2}{b^2 + c^2} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(A)}$$

II. Essendo dati il valore a dell'ipotenusa d'un triangolo rettangolo, ed il rapporto $m : n$ degli altri due lati, trovare il valore di essi.

Esprimendo uno dei lati col numero ignoto x, l'altro dovrà esprimersi per $\sqrt{(a^2 - x^2)}$; laonde avremo la proporzione

$$\sqrt{(a^2 - x^2)} : x :: m : n;$$

e quindi l'equazione

$$n \sqrt{(a^2 - x^2)} = m x$$

donde si ha

$$x = \frac{n a}{\sqrt{(m^2 + n^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(B)}$$

III. Essendo dato il valore k del perimetro di un triangolo, ed i numeri m, n, p proporzionali ai suoi lati, trovare i valori dei lati medesimi.

Rappresentati questi valori per x, y, z, avremo la proporzione

$$x : m :: y : n :: z : p$$

e quindi

$$m + n + p : x + y + z :: m : x :: n : y :: p : z$$

e posta la somma dei tre numeri dati $m + n + p = s$, sarà

$$s : k :: m : x :: n : y :: p : z$$

e finalmente

$$x = \frac{mk}{s}, y = \frac{nk}{s}, z = \frac{pk}{s} \quad \ldots\ldots \text{(C)}$$

IV. Dati il valore a dell'ipotenusa, ed il valore s della somma degli altri lati, trovare il valore di essi.

Posto il valore di uno di questi lati x, quello dell'altro sarà $s - x$; talmentechè avremo l'equazione

$$x^2 + (s - x)^2 = a^2$$

e quindi

$$x = \frac{1}{2} s \pm \frac{1}{2} \sqrt{(2a^2 - s^2)} \quad \ldots\ldots \text{(D)}$$

V. Dividere una retta data in media ed estrema ragione.

Sia a il valor numerico della retta; ed x quello della parte maggiore della retta medesima. Siccome x debb' essere un medio geometrico fra $a - x$ ed a, avremo

$$a - x : x :: x : a$$

donde

$$(a - x)\, a = x^2$$

ed

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{(a^2 + \frac{a^2}{4})} \quad \ldots\ldots \text{(E)}$$

ovvero

$$x = (\pm \sqrt{5} - 1)\, \frac{a}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(F)}$$

VI. Dividere un circolo dato, mediante un altro circolo concentrico, in media ed estrema ragione; ovvero in tal modo che l'armilla risulti media geometrica tra i due circoli.

L'elemento incognito è evidentemente il raggio del circolo concentrico da descriversi; posto $= x$ il valore di

questo raggio, e chiamato r il raggio del circolo dato, πx^2, πr^2 saranno le respettive aree di quei circoli, e $\pi (r^2 - x^2)$ sarà l'area dell'armilla; cosicchè avremo

$$\pi x^2 : \pi (r^2 - x^2) :: \pi (r^2 - x^2) : \pi r^2$$

ed

$$rx = r^2 - x^2$$

dalla quale si ha

$$x = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(r^2 + \frac{r^2}{4}\right)}$$

Si vede che questa formula è identica colla formula (E); ciò mostra che il problema si riduce a dividere il raggio del circolo dato in media ed estrema ragione. Infatti dall'equazione

$$rx = r^2 - x^2$$

si ha la proporzione

$$r - x : x :: x : r.$$

8. La risoluzione di questi problemi non ha presentato alcuna difficoltà; poichè tutto riducendosi a determinare il valore di uno, o più elementi geometrici atti a soddisfare ad alcune proprietà di grandezza, è riuscita perfino superflua la costruzione della figura, potendosi in tal caso ridurre lo stato della questione ad una semplice relazione di numeri traducibile in equazione senza aver ricorso ad alcun artifizio analitico. Ma talvolta il quesito richiederà la costruzione di una figura, che soddisfaccia ad alcune proprietà di situazione, e siccome i principj esposti non comportano altra applicazione dell'algebra, che quella per cui si traducono in numeri le proprietà di grandezza, avvi luogo di credere, che questo particolare ordine di quesiti abbia d'uopo di alcune speciali regole per la determinazione dell'equazione. Prendiamo a ricercarle nella risoluzione de' seguenti problemi.

I. Determinare sopra la retta MN (fig. 1) data di posizione, un punto, in modo che le rette condotte da esso ai due punti parimente dati A e B formino i due angoli adiacenti alla medesima retta uguali.

Qui si tratta, come è manifesto, di costruire una figura col mezzo di rette che soddisfacciano ad una indicata proprietà di situazione: a prima vista non si scorge come l'algebra possa prestarsi ad esprimerla; ma quando si pensi che a proprietà di situazione sogliono venir dietro proprietà di grandezza, vedremo chiaro un principio che immediatamente risolve l'indagine che ci siamo proposta; infatti, se per le poste proprietà di situazione dovranno aver luogo proprietà di grandezza, se queste proprietà di situazione e grandezza dovranno coesistere in un modo invariabile, è manifesto che ove la figura godesse di alcune proprietà di grandezza, quella medesima costruzione che le dà esistenza costituirebbe le annesse proprietà di situazione.

Rimarranno a determinarsi le opportune proprietà di grandezza conseguenti alle date proprietà di situazione, ma in ciò dovremo ricorrere alle proposizioni della geometria per le quali ci sono note tutte le proprietà delle diverse figure; e queste proprietà ci dovranno servire come di mezzo per instituire un util confronto.

Nel supposto pertanto che il punto richiesto sia X, conduciamo le rette AX e BX; gli angoli AXM, BXM dovranno risultare uguali; quindi abbassando le due perpendicolari AC e BD sopra MN, i due triangoli ACX e BDX dovranno risultare simili; e come simili dovranno avere i loro lati omologhi proporzionali: questa è una proprietà di grandezza che tien dietro alla posta pro-

prietà di situazione. La figura è pertanto puramente ipotetica, ma prendendo per incognita una delle rette da cui dipende tutta la sua costruzione, e tale che sia alle altre rette congiunta per proprietà di grandezza, sarà agevole determinarne il suo valore, e quindi agevole l'eseguire la costruzione richiesta. Frattanto nel caso nostro dovremo prendere per incognita la retta CX, ed indicarne il valore numerico da determinarsi per x; allora esprimendo per le lettere d, d' ed a il valore delle rette cognite AC, BD, CD, delle quali le due prime esprimono le date distanze dei punti A e B dalla retta MN, l'altra esprime la parte di MN intercetta fra le perpendicolari da essi punti abbassate, avremo

$$d : d' :: x : a - x$$

$$d' x = a d - d x$$

e quindi

$$x = \frac{a d}{d + d'} \quad \ldots\ldots \text{(G)}$$

II. A viemeglio schiarire l'esposta dottrina, proponiamoci di costruire sopra una base data AB (fig. 2) rappresentata pel numero a, un triangolo isoscele, in cui ciascuno degli angoli adiacenti alla base medesima sia doppio dell'angolo al vertice.

Sia ABC il triangolo isoscele in cui ciascuno degli angoli uguali ABC e BAC è doppio dell'angolo ACB. Per discoprire una delle proprietà di grandezza che da tale ipotesi possono derivare, osserviamo che una retta BD la quale fosse condotta in modo da dividere l'angolo ABC in due parti uguali, formerebbe il triangolo ABD simile al triangolo ABC; dunque i lati AC, CB, AB del triangolo ABC dovrebbero essere proporzionali ai lati respetti-

vamente omologhi AB, BD, AD del triangolo ABD; ma poichè $AC = CB$, dovrebbe pure essere $AB = BD = DC$. Queste sono le condizioni a cui dee soddisfare la figura corrispondentemente all'indicata proprietà di situazione. Ora osservando che la costruzione della figura dipende dal lato AC, chiamato x il numero incognito esprimente il valore di questo lato, sarà $x - a$ il valore di AD, e per conseguenza

$$x : a :: a : x - a$$

$$x^2 - ax = a^2$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(a^2 + \frac{a^2}{4}\right)} \ldots \text{(H)}$$

III. Sia dato il triangolo ABC (fig. 3) e la retta MN condotta comunque a traverso i lati AB, AC; proponiamoci di condurre una parallela mn ad essa retta in modo che il triangolo ABC risulti medio proporzionale geometrico tra i due triangoli AMN, ed Amn.

I tre triangoli AMN, ABC, Amn, hanno un angolo comune in A; perciò essi sono proporzionali ai respettivi rettangoli dei lati costituenti quest'angolo comune; or le quattro rette AM, AN, AB, AC date in grandezza, possono intendersi espresse pei numeri m, n, b, c; le rette Am, An d'ignota grandezza possono esprimersi pei numeri ignoti x, y; ciò posto, per la prima proprietà di grandezza a cui dee soddisfare la figura, avremo la proporzione

$$mn : bc :: bc : xy$$

e quindi l'equazione

$$mnxy = b^2c^2;$$

in questa guisa parrebbe che il problema fosse indeterminato, cioè, che la retta mn potesse condursi in infinite maniere; ma riflettendo che questa retta dee soddisfare ad

una proprietà di situazione, poichè deve essere parallela ad MN, è manifesto che dovremo includere nella equazione suddetta la proprietà di grandezza che ne consegue, per cui sarà

$$m : n :: x : y$$

e perciò

$$y = \frac{nx}{m} \quad n^2 x^2 = b^2 c^2$$

e quindi

$$x = \frac{bc}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

IV. Inscrivasi un quadrato in un dato semicerchio ABD, (fig. 4) in modo che uno dei suoi lati coincida col diametro, e proponiamoci di determinare il valore del lato del quadrato.

È manifesto che le estremità del lato coincidente col diametro dovranno essere ad egual distanza dal centro C. Ciò posto, sia $MNPQ$ il richiesto quadrato; avremo allora $MQ = MN = 2MC$; indicato con x il valore di MC, e con r quello del raggio AC, sarà

$$r^2 = x^2 + 4x^2$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{r^2}{5}} \quad \ldots\ldots \text{(K}$$

ovvero

$$x = \pm \frac{r}{\sqrt{5}} \quad \ldots\ldots \text{(L)}$$

9. Frattanto risulta che come nell' algebra propriamente detta, così nell' applicazione dell' algebra alla geometria lo scioglimento di un problema consta di due parti; la prima è la traduzione del problema in linguaggio algebrico, cioè in equazione; l' altra è la risoluzione dell' equazione medesima. In quanto alla traduzione del problema in equa-

zione convien dire che il primo e più generale canone su cui essa riposa consiste nel supporre il problema risoluto; per questa supposizione, d'altronde coerente al procedimento della mente umana in ogni sua speculativa indagine, l'elemento da determinarsi considerasi come noto, la figura da costruirsi considerasi come costrutta, e ciò serve mirabilmente a dirigere i nostri tentativi, dietro una sicura scorta, verso l'oggetto vero della ricerca: perchè se nell'enunciato del problema si scorgerà immediatamente una proprietà di grandezza in cui sia incluso l'elemento che si richiede, supposto cognito il valore di questo elemento, ed indicatolo per la lettera x, avremo immediatamente l'equazione; se il problema non preciserà in un modo positivo le proprietà di grandezza in cui può entrare l'incognito elemento, ovvero richiederà la costruzione di una figura che soddisfaccia a proprietà di situazione, supponendo questa figura costrutta di fatto, agevolmente si scorgeranno le proprietà di grandezza che ne conseguono; tra queste sceglieremo quelle che basteranno a verificare le condizioni del problema e che conterranno una delle rette incognite da cui possa dipendere tutta la costruzione della figura; da esse avremo l'equazione come nel precedente caso. Relativamente a ciò vuolsi osservare che in ogni quesito molti elementi sono dati implicitamente; e che perciò dopo aver disegnato la figura ipotetica, l'opera nostra dee consistere nel rendere questi elementi espliciti onde facilitare la ricerca delle proprietà di grandezza: per esempio, essendo data la posizione di una retta e di un punto, sarà data implicitamente la distanza di esso dalla retta medesima; ond'è che potremo abbassare da quel punto sopra la retta una perpendicolare e considerarla come uno dei

dati del problema. Tali costruzioni sono indispensabili per dedurre dalle ipotetiche proprietà di situazione le opportune proprietà di grandezza. Queste osservazioni non presenteranno alcuna difficoltà, ove siensi meditate le particolari risoluzioni dei problemi precedenti, poichè racchiudono i principii che noi esponiamo; ma convien confessare che molto bisogna rimettere al discernimento dell'operatore, ed alla pratica che insegna tutti gli artifizii del raziocinio dei quali talvolta si può far uso utilmente.

10. Risoluta l' equazione in cui sono state tradotte le condizioni del problema, ovvero trovata l'espressione algebrica dell' incognita, quello che resta a fare è un calcolo aritmetico indicato dalla composizione dell' espressione medesima; i valori numerici delle quantità che vi sono comprese saranno indicati dai casi particolari in cui potrà trovarsi il problema.

11. Bensì non bisogna credere che indipendemente da questi calcoli non sia possibile trovare l' elemento che si ricerca; è d' uopo osservare che nello stesso modo con cui le proprietà geometriche dell' estensione possono essere tradotte in equazioni algebriche, viceversa queste e le trasformazioni a cui vanno soggette possono essere interpretate per modo che esprimano delle proposizioni di geometria. In primo luogo è chiaro che se una retta contenente tre volte l' unità di misura lineare può esser rappresentata dal numero 3, viceversa dal numero 3 e dall' assegnata grandezza dell' unità si può ricavare la retta stessa. Di più se d e d' rappresentassero i valori numerici di due rette AC e BD (fig. 1) e fosse $z = d + d'$, si saprebbe a un tempo che il valore numerico della retta z è indicato dalla somma dei numeri d e d', e che la retta rappresentata da z si può

effettivamente ottenere prolungando AC di una quantità indicata da BD. Dalla formula poi $x = \frac{ad}{d+d'}$ (G), ovvero $x = \frac{ad}{z}$, la quale dà $z : a :: d : x$, si vede che x è una quarta proporzionale geometrica dopo z, a, d, ovvero che la retta rappresentata per x è una quarta proporzionale geometrica dopo $AC + BD$, CD ed AC; ed è manifesto che essa si può determinare coi noti metodi grafici che c'insegna la geometria elementare. Qui giova osservare che prendendo sul prolungamento di BD una parte $DB' = BD$, e tirando AX, la quarta geometrica suddetta è CX; difatti

$$AC : CX :: B'D : DX;$$

e perciò

$$AC + B'D : CX + DX :: AC : CX;$$

ovvero

$$AC + BD : CD :: AC : CX.$$

Si vede dunque che i calcoli indicati dall'espressione dell'incognita non sono indispensabili per determinare il suo valore geometrico, o assoluto: e che mediante le operazioni grafiche le quali si effettuano colla riga e col compasso si può rendere indipendente dall'aritmetica una formula che appartiene alla geometria. Queste operazioni chiamansi *costruzioni geometriche:* per mezzo di esse sempre si trova la grandezza assoluta dell'incognita: mentrechè pei calcoli aritmetici non si può ottenere questo valore assoluto, se non quando l'incognita risulta espressa per un numero intero, o per un numero fratto. La formula (F) mostra chiaramente che non v'ha alcun numero, il quale possa esser razionalmente diviso in media ed estrema ragione: e questo è uno dei casi in cui per avere l'esatto valore assoluto del-

l'incognita, conviene aver ricorso ad una geometrica costruzione. Questa costruzione nel caso attuale riesce facilissima, quando in luogo della formula (F) si consideri la sua identica (E); posto il radicale $= z$, e non prendendo in considerazione che il suo segno positivo per non impegnarci in discussioni che or sarebbero fuori di luogo, avremo

$$z^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}, \quad x = z - \frac{a}{2}$$

lo che mostra che z rappresenta l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo nel quale gli altri lati sono rappresentati da a ed $\frac{a}{2}$, e x è l'eccesso di questa ipotenusa sopra $\frac{a}{2}$. Così essendo AB la retta indicata per a, inalzando all'estremità B la perpendicolare BC eguale alla metà di AB, avremo $AC = z$; quindi se fatto centro in C col raggio BC descriveremo l'arco BD, avremo $AD = z - \frac{a}{2}$; finalmente se fatto centro in A, e col raggio AD descriveremo un arco, esso dividerà la retta AB nel punto X in media ed estrema ragione. Dobbiamo però osservare che l'errore che si commette determinando x mediante la costruzione geometrica, a cagione dell'inesattezza cui vanno soggette le grafiche operazioni è più grande di quello che deriva dal calcolo in virtù del quale l'errore che si commette nella valutazione degl'irrazionali si può render piccolo quanto vogliamo.

12. Risulta frattanto che per trovare indipendentemente dal valore numerico delle rette, la grandezza dell'incognita, si rende necessario sapere interpretare geometricamente la formula algebrica che si trova risolvendo l'equa-

zione, leggendovi anzichè i calcoli aritmetici indicati dai segni, quelle proprietà geometriche dell'estensione che con essi concordano. Prima però di accingerci ad assegnare le opportune regole a tale oggetto, cominceremo dall'esaminare se una equazione algebrica qualunque, nella quale vengano considerate le lettere di cui è funzione come rappresentanti l'assoluta lunghezza di linee rette, possa costantemente ammettere una interpretazione geometrica, o se, ammettendola, debba in tal caso soddisfare ad alcune particolari condizioni.

È da osservarsi che le linee entrano in calcolo paragonate alla loro unità di misura; cioè come numeri astratti; ed essendo AB, CD, EF, ... (fig. 6) varie rette, MN l'unità di misura, una figura costrutta con queste rette darebbe luogo per le sue proprietà di grandezza, ad una equazione la quale, ove volessero introdursi in calcolo le effettive lunghezze delle rette medesime in luogo dei numeri corrispondenti, non potrebbe esser che una funzione delle frazioni $\frac{AB}{MN}$, $\frac{CD}{MN}$, $\frac{EF}{MN}$,.... che sono i rapporti delle rette medesime coll'unità. Frattanto dalle regole dell'addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione segue che queste quantità in qualunque modo combinate debbono necessariamente condurre a dei risultati *omogenei*, cioè tali che tolte le frazioni per la riduzione al medesimo denominatore, tutti i termini risultino composti del medesimo numero di fattori. Questa sembra dover essere la condizione a cui è d'uopo che soddisfaccia una equazione, affinchè le lettere di cui è funzione rappresentino l'effettiva lunghezza di più rette, e onde sia la legittima traduzione della proprietà di grandezza d'una figura. Per dimostrarlo colla dovuta ge-

neralità, indicati i detti rapporti per le frazioni $\frac{a}{u}$, $\frac{b}{u}$, $\frac{c}{u}$, ec., rappresentiamo una funzione qualunque dei medesimi per $\phi\left(\frac{a}{u}, \frac{b}{u}, \frac{c}{u}, \ldots\right)$, ovvero, posto $\frac{a}{u} = p$, $\frac{b}{u} = q$, $\frac{c}{u} = r$, per

$$\phi\,(p, q, r, \ldots).$$

Per procedere con semplicità, supponiamo in primo luogo che trattisi de' due soli elementi $\frac{a}{u}$, $\frac{b}{u}$; avremo in generale, ordinando rapporto a p,

$$\phi\,(p, q) = A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + \ldots.$$

E siccome l'espressione algebrica de'coefficienti $A, B, C, \ldots$ non può contenere che la sola lettera q, l'ipotesi più generale che si possa fare intorno alla forma di essi consisterà nel supporre

$$A = N + Mq + Pq^2 + \ldots = N + M\frac{b}{u} + P\frac{b^2}{u^2} + \ldots$$

$$B = N' + M'q + P'q^2 + \ldots = N' + M'\frac{b}{u} + P'\frac{b^2}{u^2} + \ldots$$

ove $N, N', \ldots M, M', \ldots P, P', \ldots$ ec., non potendo esser che numeri, ogni termine sarà della dimensione zero; ma $p = \frac{a}{u}$ è pure della dimensione zero: dunque ogni termine di $\phi\left(\frac{a}{u}, \frac{b}{u}\right)$ è della dimensione zero. Avrebbe luogo lo stesso ragionamento, se la funzione si supponesse ordinata rapporto a q.

Nella ipotesi che la funzione comprenda tre elementi $\frac{a}{u}$, $\frac{b}{u}$, $\frac{c}{u}$, sarà

$$\phi(p, q, r) = A' + B'p + C'p^2 + \ldots$$

e l'espressione algebrica de' coefficienti A', B', ... non potrà contenere che le lettere q ed r; perciò sarà

$$A' = \phi'(q, r),\ B' = \phi''(q, r),\ C' = \phi'''(q, r), \text{ ec.};$$

ma per la dimostrazione precedente queste funzioni dopo la sostituzione de' rapporti $\frac{b}{u}$, $\frac{c}{u}$ in luogo di q ed r, risultano della dimensione zero, dunque $\phi\left(\frac{a}{u}, \frac{b}{u}, \frac{c}{u}\right)$ è pure della dimensione zero.

Se gli elementi della funzione fossero quattro $\frac{a}{u}$, $\frac{b}{u}$, $\frac{c}{u}$, $\frac{d}{u}$, ne' coefficienti di essa ordinata rapporto a p, ne sarebbero contenuti tre; così essi ed in conseguenza anche la funzione stessa sarebbero della dimensione zero. In generale la funzione, essendo n il numero degli elementi in essa compresi, sarà della dimensione zero, giacchè venendo ordinata rapporto a p, potremo sempre dimostrare che i suoi coefficienti, i quali comprenderanno $n-1$ elementi, sono della dimensione zero. Pertanto se $\phi\left(\frac{a}{u}, \frac{b}{u}, \frac{c}{u}, \ldots\right)$ è della dimensione zero, l'equazione $\phi\left(\frac{a}{u}, \frac{b}{u}, \frac{c}{u}, \ldots\right) = 0$, dopo avere eliminato i denominatori, riescirà omogenea, ed avrà la dimensione del numeratore.

13. Qui però occorre avvertire che talvolta al rapporto $\frac{z}{u}$ di due rette z ed u, viene sostituito quello $\frac{k}{h}$ di altre due rette, essendo $z : u :: k : h$. Ma ciò non turba in alcun modo l'omogeneità dei termini, sebbene possa venire alterata la forma algebrica dei risultati; imperocchè una tale

sostituzione si riduce a porre $\frac{ku}{h}$ in luogo di z; ed è chiaro che $\frac{ku}{h}$ è, come z, di una sola dimensione. Di qui si vede pure che una funzione qualunque delle frazioni $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \ldots$ risulta necessariamente omogenea.

14. È da ricercarsi se per servire alla semplicità delle formule possiamo fare in esse $u = 1$, senza alterare il loro geometrico significato. È chiaro che se fosse, per esempio, $x = \frac{ab}{u}$, posto $u = 1$, avremmo $x = ab$; questo risultato, ove a e b esprimessero numeri, non darebbe luogo ad alcuna difficoltà; ma se vogliamo che a e b rappresentino effettivamente delle rette, $x = ab$ sarà una equazione assurda, non potendo la retta x essere uguale al prodotto delle due rette a e b rappresentante il rettangolo di cui a e b sono le dimensioni.

In molti casi però avviene che fatto $u = 1$, sebbene l'equazione debba riuscire di minor dimensione, può tuttavia mantenersi omogenea. E ciò vuol significare che la retta u presa per unità di misura è indifferente alla costruzione del valore dell'incognita; infatti se per $u = 1$ l'equazione resta omogenea, vuol dire che fatte le opportune riduzioni, u entrerà in tutti i termini alla stessa potestà, e potrà in conseguenza eliminarsi. Talmentechè in vece di rappresentarsi gli elementi del problema coi numeri $\frac{a}{u}, \frac{b}{u}, \frac{c}{u}, \ldots$ potrebbero in tali casi rappresentarsi colle lettere semplici $a, b, c, \ldots$ senza turbare il significato geometrico dell'algebrica espressione.

Ma quando fatto $u = 1$ l'equazione cesserà d'essere omogenea, la retta u sarà un elemento indispensabile alla costruzione del risultato; sarà una delle rette con cui è stata costrutta l'ipotetica figura donde l'equazione è derivata, e che essendo posta $= 1$ ha alterato la corrispondenza tra l'equazione medesima e la figura; in questo caso per rendere ai risultati il giusto significato, converrà opportunamente collocare il fattore u dove è necessario, acciocchè la formula risulti omogenea, e cessi d'essere assurda.

Or se questo comodo mezzo abbiamo per rendere alle formule che si riferiscono a questioni geometriche il giusto significato, meglio sarà per la speditezza delle operazioni di rappresentar sempre le rette che debbono entrare nell'equazioni per le semplici lettere $a, b, c, \ldots$ facendo uguale all'unità quella che meglio contribuisce a semplicizzare le formule da determinarsi; e quando queste formule non saranno omogenee, tali si renderanno coll'indicato artifizio, cioè col mezzo dell'opportuno collocamento di u. A ciò fare basterà sostituire alle lettere $a, b, c, \ldots$ contenute nelle formule stesse i rapporti $\frac{a}{u}, \frac{b}{u}, \frac{c}{u}, \ldots$ giacchè per l'esposta dimostrazione (12) si vede chiaramente che qualunque funzione $\phi(a, b, c, \ldots)$ dee diventare omogenea, quando a tutte le lettere $a, b, c, \ldots$ in essa contenute si sostituiscono le espressioni $\frac{a}{u}, \frac{b}{u}, \frac{c}{u}, \ldots$

15. Le lettere contenute nelle equazioni stabilite (7 e 8), e che coerentemente al concetto primitivo, donde abbiamo mossa l'applicazione dell'algebra alla geometria, esprimeano numeri astratti, ovvero i rapporti delle rette coll'unità, ora possono considerarsi come esprimenti l'effettiva

lunghezza di queste rette; ed in tale ipotesi noi prenderemo a costruirle. Esse sono omogenee, poichè l'unità non è una delle rette costituenti le figure a cui appartengono. Avvertiremo che intorno alla costruzione delle formule algebriche non si possono stabilire regole generali, poichè non è possibile prendere a costruire tal formula che comprenda qualunque particolar costruzione, ed in secondo luogo perchè queste grafiche operazioni possono variarsi in molte guise, a seconda dei non pochi artificii de' quali la pratica sola e l'esercizio possono suggerire il più semplice, ed il più confacente allo stato della figura. Le particolari costruzioni delle formule (A), (B), (C), ec. che prendiamo a fare basteranno però a stabilire que' modi più generali secondo i quali è d'uopo procedere.

16. Incominciando dalla formula (A), osserviamo che posto $y^2 = b^2 + c^2$, si ha

$$x = \frac{ac^2}{y^2} = \frac{ac}{y} \times \frac{c}{y}, \text{ e posto } z = \frac{ac}{y}, \text{ si ha}$$

$$x = \frac{cz}{y}.$$

Così y sarà l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo nel quale i lati dell'angolo retto sono b e c; z sarà una quarta proporzionale dopo y, c ed a; ed x finalmente sarà una quarta proporzionale dopo y, c e z. Pertanto essendo ABC (fig. 7) il triangolo dato, e supponendo che a, b, c, rappresentino i lati respettivamente opposti agli angoli indicati per le stesse lettere, si conduca una perpendicolare all'estremità A di AB; di essa perpendicolare si prenda una porzione $AE = AC$ e si tiri BE. Quindi presa la parte $BF = BC$, si conduca FG parallela ad AE; si prenda di BE la porzione $BI = BG$, e si tiri IH parallela ad AE;

finalmente si porti BH sopra BC mediante l'arco HD descritto da B, sarà $BD = x$, e D sarà il punto richiesto.

Se il triangolo fosse rettangolo in A, avremmo $a^2 = b^2 + c^2$ ed $x = \frac{c^2}{a}$, cioè AB medio proporzionale fra BC ed il segmento adiacente BD; perciò AD sarebbe perpendicolare a BC. E qui resta comprovata la nota proprietà del triangolo rettangolo per cui i quadrati de' lati dell' angolo retto stanno nella ragione de' segmenti ne' quali la perpendicolare abbassata dal vertice dell' angolo medesimo divide l' ipotenusa.

Le formule (B) e (C) non presentano particolarità rimarchevoli in quanto alla costruzione che risulta semplicissima nel supposto che m, n e p sieno delle date rette.

La formula (D) essendo della indole della formula (E) di cui abbiamo già indicata la costruzione (11), non può presentare difficoltà che per la costruzione del binomio posto sotto il radicale. Ma facendo questo binomio $= y^2$, ed $a^2 + a^2 = z^2$, avremo $z^2 - s^2 = y^2$; donde risulta che y è un lato d'un triangolo rettangolo la cui ipotenusa è z e l'altro lato è s.

La formula (I) non presenta particolarità alcuna per la costruzione, ma ne presenta per il modo con cui essa si può facilmente eseguire su la data figura. Infatti basta condurre pel punto B una parallela Bn ad MC; An così determinata sarà la retta richiesta.

Nella formula (K) la x esprime una media proporzionale fra r e $\frac{r}{5}$ e facilmente si determina; è però singolare il modo con cui si può costruire sopra la figura, poichè prolungando il raggio DC (fig. 4), perpendicolare al diametro,

al di sotto di esso d'una quantità $CE = \frac{r}{5}$ e descrivendo col diametro DE una circonferenza, essa taglierà il diametro AB del semicircolo dato ne' punti richiesti M e Q.

17. Ciò è sufficiente per comprendere l'indole di simili operazioni. Ogni altra formula algebrica più complicata di quelle che abbiamo considerate si potrà agevolmente ridurre a queste, e costruirsi per le già praticate costruzioni elementari; perchè

I. se la formula sarà una frazione *lineare* monomia, come $x = \frac{abcd}{mnp}$, avremo $x = \frac{ab}{m} \times \frac{c}{n} \times \frac{d}{p}$ e ponendo allora $z = \frac{ab}{m}$, $z' = \frac{cz}{n}$, troveremo $x = \frac{dz'}{p}$.

II. se la formula sarà una frazione lineare polinomia nel numeratore, come $x = \frac{abc + def + geh}{mn}$, avremo

$$x = \frac{abc}{mn} + \frac{def}{mn} + \frac{geh}{mn}.$$

III. Se sarà una frazione polinomia nei due termini, come $x = \frac{abc + def + geh}{mn + pq + rs}$, posto il denominatore $mn + pq + rs = mz$, sarà $z = n + \frac{pq}{m} + \frac{rs}{m}$, ed

$$x = \frac{abc}{mz} + \frac{def}{mz} + \frac{geh}{mz}.$$

IV. Se sarà un radicale del secondo grado lineare, esso sarà della forma $\sqrt{(ab + cd + ef + gh + \ldots)}$ oppure della forma $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots)}$.

Per $x = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ldots)}$ faremo $c^2 + d^2 = z^2$, $b^2 + z^2 = z'^2$, $a^2 + z'^2 = z''^2$, e risulterà $x = z''$.

Per $x = \sqrt{(ab + cd + ef + gh)}$ potremo fare la quantità sotto il radicale $= az$, ovvero $z = b + \frac{cd}{a} + \frac{ef}{a} + \frac{gh}{a}$, lo che darà $x = \sqrt{(az)}$; oppure potremo fare $ab = z^2$, $cd = z'^2$, $ef = z''^2$, $gh = z'''^2$; e ciò ridurrà la formula al caso precedente $x = \sqrt{(z^2 + z'^2 + z''^2 + z'''^2)}$, essendo $z = \sqrt{(ab)}$, $z' = \sqrt{(cd)}$, $z'' = \sqrt{(ef)}$, $z''' = \sqrt{(gh)}$.

Talvolta però han luogo alcune semplicizzazioni che non bisogna perder di vista. Per esempio, essendo $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$, in luogo di fare coerentemente alla regola anzidetta $x = \frac{a^2}{c} - \frac{b^2}{c}$, oppure di calcolare a parte il numeratore ponendo $z^2 = a^2 - b^2$, potremo trasformare la formula nell' altra $x = \frac{(a+b)(a-b)}{c}$, e cercare una quarta proporzione dopo c, $a+b$ ed $a-c$. Essendo $x = \sqrt{(a^2 - b^2)}$, in luogo di costruire il triangolo rettangolo, potremo cercare una media proporzionale tra $a + b$ ed $a - b$, quando ciò meglio si adatti alla figura. Ma intorno a ciò la pratica più vale dei precetti speciali che noi potremmo assegnare.

CAPITOLO II.

Teoria delle figure correlative.

18. La geometria elementare prendendo a considerare due figure rispetto al loro perimetro ed ai loro angoli, vi trova tre generi diversi di rapporti. 1.° Quello di *uguaglianza*, ovvero quello di completa identità, il quale ha luogo quando le rette che costituiscono le due figure sono uguali in grandezza e disposte nell' ordine medesimo, facendo angoli respettivamente uguali. 2.° Quello di *simmetria*, il quale differisce dal precedente nell' essere le stesse rette poste in ordine inverso. 3.° Quello di *similitudine*, che ha luogo allorquando esse rette sono respettivamente proporzionali, facendo sempre angoli respettivamente uguali. In tutti questi casi le figure che si paragonano hanno il medesimo numero di elementi; lo stesso numero di lati, e di angoli: la loro più rilevante diversità si scorge nel rapporto di similitudine, ove le figure differiscono per le grandezze dei lati, sebbene queste grandezze sieno subordinate ad una certa legge, a quella cioè della proporzionalità. Or se tal proporzionalità non avesse luogo, le due figure presenterebbero un caso più generale dei tre annoverati; più generale ancora sarebbe il caso, se le figure differissero inoltre pel valore degli angoli; più generale finalmente sarebbe quello in cui le figure non presentassero che i medesimi punti congiunti fra loro per un ugual numero di linee rette, o curve, e differissero nella posizione e lunghezza di esse. Per esempio, essendo A un punto, o vertice della prima fig. 8.ª, ed A' il

corrispondente della seconda (fig. 9), questi punti A, A′ potrebbero esser respettivamente congiunti ai punti B, B′; C, C′; D, D′; ec., mediante le medesime rette A B, A′B′; A C, A′ C′; ec., nei due differenti modi che le stesse figure presentano. Pertanto il nostro proposito è di prendere a considerar le figure nel caso in cui ha luogo questo solo generale rapporto, chiamato *rapporto di correlazione*; il quale include come casi speciali i tre annoverati rapporti contemplati dalla geometria elementare. Frattanto osservando che la figura 8 potrebbe passare allo stato della figura 9, ove il punto A della prima si muovesse in modo da collocarsi fra i punti B, C, D, ... percorrendo per esempio la retta A M opportunamente descritta, segue che esisterà correlazione tra due figure, ogniqualvolta facendo convenientemente muovere in una di esse alcuni punti colle rette che ne dipendono, potremo passare allo stato dell'altra. Intenderemo perciò che due figure sieno correlative, quando avendo i medesimi punti congiunti tra loro per un ugual numero di linee rette, o curve, non differiranno che nella posizione di quelli e nella grandezza e posizione di queste: talmentechè niun elemento (sia linea, o angolo) della prima figura, dovrà essere zero nella seconda, e nessuna retta, che ha in una di esse un valore finito, dovrà averne uno infinito nell'altra.

Due poligoni d'un medesimo numero di lati sono dunque due figure correlative, quand'anche uno di essi avesse angoli rientranti. E qualunque costruzione venisse fatta in uno di essi, purchè fosse ripetuta nella medesima guisa e sopra elementi corrispondenti nell'altro, darebbe luogo a due figure parimente correlative.

19. A viemeglio dilucidare queste idee si prendano a

considerare le figure 10 e 11: esse sono costituite d'un semicircolo ABO, d'una corda AB condotta dalla estremità del diametro AO, e di due rette BC, BD di cui la prima è un raggio che tocca l'estremità B dell'arco AB, l'altra è una perpendicolare al diametro AO; gli elementi ABO, AB, BC, BD e le due distanze DA, DC sono comuni alle due figure; dunque esse possono dirsi correlative; ed infatti facendo descrivere al punto B la circonferenza, è manifesto che si passa dallo stato d'una di esse a quello dell'altra. Ogni altra figura composta del medesimo numero d'elementi sarebbe correlativa alle precedenti, qualunque fosse d'altronde la grandezza del raggio e della corda, che sono elementi da cui tutta la figura dipende: ma tale non potrebbe dirsi una figura che mancasse d'uno degli annoverati elementi: per esempio sia l'arco AB (fig. 12) uguale alla quarta parte della circonferenza; sarà la distanza DC = 0; quindi intenderemo che la figura non abbia correlazione colle precedenti; bensì potremo considerarla come un caso particolare di ciascuna di esse.

20. Le figure correlative, a cagione della corrispondenza che regna tra le loro parti, hanno necessariamente delle comuni proprietà; dalla figura 10, come dalla figura 11 si ricavano le due equazioni

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 \ldots\ldots (a)$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{DC}^2 \ldots\ldots (b)$$

e quindi a cagione di AC = BC

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + (\overline{AD}^2 - \overline{DC}^2) \ldots (c)$$

talmentechè le due proprietà comuni (a) e (b) sono comprese nella formola (c), ovvero nella proposizione, che il qua-

drato della corda è uguale al quadrato del raggio più la differenza de' quadrati delle due distanze AD, DC, del centro e della estremità del diametro dal piede della perpendicolare.

21. Quando di due figure correlative si conosce l'equazione in cui si traducono le loro comuni proprietà, includendo nell'equazioni medesime le condizioni per cui le due figure differiscono una dall'altra, si avranno le equazioni speciali, proprie delle due figure. Così supponendo che le figure 10 e 11 differiscano per la lunghezza dell'arco AB, essendo nella prima minore, nella seconda maggiore della quarta parte della circonferenza; ovvero che l'angolo ACB nella figura 10 sia acuto, e nella figura 11 ottuso; avremo nella prima

$$AD = AC - DC \ldots\ldots (d)$$

e nell'altra

$$AD = AC + DC \ldots\ldots (e)$$

e questa è la condizione per cui le due figure sono tra loro differenti. Posto ora il valore (*d*) di AD nella formula (*c*), avremo

$$\overline{AB}^2 = 2\,\overline{AC}^2 - 2\,AC \times CD \ldots (f)$$

la quale è una proprietà della figura 10 e di tutte le sue correlative in cui l'angolo ACB è acuto.

Posto il valore (*e*) di AD nella formula (*c*), avremo

$$\overline{AB}^2 = 2\,\overline{AC}^2 + 2\,AC \times CD \ldots (g)$$

e questa è una proprietà della figura 11 e di tutte le sue correlative in cui l'angolo ACB è ottuso.

22. Ponendo mente alle condizioni (*d*) ed (*e*), che possono indicarsi anche in questo modo

$$DC = AC - AD \ldots\ldots (d')$$
$$DC = AD - AC \ldots\ldots (e')$$

diremo che la dissomiglianza della correlazione, o la diversità delle due formule (f) e (g) proviene dall'essere nella figura cui appartiene (f), $AC > AD$, ed in quella cui appartiene (g), $AD > AC$, ovvero dall'essere i valori di DC nelle due figure relativamente *inversi*.

In generale sia $x = p - q$; chiameremo *diretti fra loro* tutti i valori x' di x dedotti nell'ipotesi di $p > q$; come anche chiameremo diretti fra loro tutti quelli x'' di x, che si deducono da $x = q - p$, cioè nell'ipotesi di $q > p$; ma i valori x' si diranno *inversi* per rapporto ai valori x'' e reciprocamente.

Per analogia poi chiameremo *figure correlative fra loro dirette* quelle in cui i valori di tutti gli elementi corrispondenti saranno respettivamente diretti, e *figure correlative fra loro inverse* quelle in cui uno, o più elementi corrispondenti avranno valori inversi.

Figure correlative dirette sono per esempio tutte quelle come la figura 10, in cui l'angolo ACB è acuto, ed in cui verificasi la condizione (d), o (d'); come pure sono dirette fra loro le figure come la 11, in cui l'angolo ACB è ottuso, e nelle quali ha luogo la condizione (e), o (e'); ma fra una di queste ed una delle precedenti avvi correlazione inversa, poichè i valori (d') ed (e') di DC sono inversi.

23. Supponiamo pertanto che avendo determinate le proprietà di grandezza comuni a due figure correlative, esse sieno state espresse mediante l'equazione

$$\phi\,(a, b, c, d, \ldots) = 0.$$

Supponiamo inoltre che essendo per esempio a data una funzione degli elementi b, c, d, ec., o di altri non

contenuti nell'equazione medesima, questa funzione sia di diversa composizione rispetto alla seconda figura, stante la loro dissomiglianza di correlazione, essendo ex. gr. $a = f'$ per una di esse, ed $a = f''$ per l'altra; per la prima avremo

$$\phi\,(f', b, c, d, \ldots) = 0 \;.\;.\; (h)$$

e per la seconda

$$\phi\,(f'', b, c, d, \ldots) = 0 \;.\;.\; (k)$$

Queste due equazioni dovranno contenere il medesimo numero di elementi (18), senza di che le due figure non sarebbero correlative: per conseguenza anche le funzioni f', f'' è forza che contengano le medesime quantità. Ora se immaginiamo che la prima figura venga grado grado a muoversi per cangiarsi nella seconda, è manifesto che alcune di esse quantità rimarranno costanti, altre varieranno. È inutile prendere in considerazione quelle la cui variazione non è tale da renderle inverse; per esse la composizione della formula non cambia; e siccome, quando tutte le quantità di f' fossero in tal condizione, la figura risultante sarebbe diretta colla primitiva, segue intanto che *una formula dedotta da una figura può immediatamente applicarsi a tutte quelle che sono in correlazione diretta con essa*.

Quando poi una, o più quantità fossero diventate inverse, la figura risultante sarebbe in correlazione inversa colla primitiva, e le funzioni f', f'' differirebbero solo in questo, che una, o più quantità di f' avrebbero in f'' dei valori respettivamente inversi. Segue dunque che la modificazione da farsi nell'equazione (h) onde si cambi in (k), ovvero onde divenga applicabile alla seconda figura, consiste nel rendere inverse le quantità che tali sono diventate trasformando la prima figura nella seconda.

24. Posto ciò, due cose sono da vedersi; 1.° come si possano riconoscere sulla figura le quantità che divengono inverse per una trasformazione che ad essa si faccia subire; 2.° come dall' equazione (h) si possa eliminare una quantità per sostituirvi la sua inversa.

1.° Per discernere sopra due figure correlative le quantità respettivamente inverse, basta vedere se i valori che a ciascuna di esse competono nelle due figure possano esprimersi per le differenze $p-q$, $q-p$; ma si osservi che allorquando una delle figure venisse trasformata nell' altra, seguendo la legge di continuità, non potrebbe x', o $p-q$, in cui $p>q$, diventare x'', o $q-p$, ov' è $q>p$, se in un qualche stato della trasformazione non risultasse $p=q$, ed in conseguenza $x=0$. Infatti, se p e q fossero ambedue variabili, converrebbe supporre che q nel movimento della figura crescesse, mentre p decresce, o che q crescesse in ragione maggiore di p; se p fosse costante, converrebbe che q crescesse talmente da diventar maggiore di p; se poi fosse costante q, converrebbe che decrescesse convenientemente p; in tutti questi casi, prima di passare dal valore x' di x a quello x'' di x, è forza che siasi ottenuto $p=q$, o $x=0$, senza di che non sarebbesi seguita la legge di continuità, come l' ipotesi suppone: dunque si tenga per fermo che nel movimento al quale convien assoggettare gli elementi d' una figura, ond' essa venga trasformata in altra correlativa, le quantità che diventano inverse passano per lo zero.

Infatti (figg. 10, 11, 12) CD si riduce a zero quando l' arco AB è uguale alla quarta parte della circonferenza. Non bisogna credere però che la proposizione reciproca sia generalmente vera, potendo una quantità passare per lo

zero, e contuttociò non risultare inversa; imperocchè se $x = p - q$, e $p > q$, è manifesto che il valore di $x = 0$ risulta dalla sola condizione di $q = p$, senza che ulteriormente si esiga la condizione di $q > p$.

Dunque per discoprire le quantità che divengono inverse, in primo luogo determineremo quelle che passano per lo zero, e tra queste riterremo per inverse quelle che essendo nella prima figura espresse per le differenze $a - b$, $c - d$, ec., nella seconda lo sono dalle differenze $b - a$, $d - c$, ec.

2.° Nel supposto che in (h) entri la quantità x', vediamo quale operazione convenga fare per sostituire ad essa una quantità inversa x''. Sia nella figura $x = p - q$; se x'' differisce da x' come inversa, inquantochè x' è dedotta nell'ipotesi di $p > q$, ed x'' in quella di $q > p$, sarà $x' = p - q$, $x'' = q - p$; sostituire x'' ad x' vuol dire eliminare dall'equazione (h) la condizione $x' = p - q$, o $p = q + x'$ per introdurvi l'altra $x'' = q - p$, o $p = q - x''$; ora queste due espressioni di p non differiscono che nel segno di x; dunque per sostituire ad una delle quantità di cui (h) è funzione, la sua inversa, basta cambiare il segno alla medesima. E poichè questo ragionamento si può ripetere sopra tutte le altre quantità di (h) che divengono inverse, ne viene il seguente principio:

Per applicare una formula propria d'una figura, ad una figura correlativa alla medesima, bisogna cambiare in essa formula i segni delle quantità, che sono nelle due figure respettivamente inverse.

E infatti dalla formula (f) si passa alla (g) cambiando il segno a CD.

25. Reciprocamente se nell'equazione (h) si cambia il se-

gno ad una, o più quantità, essa non apparterrà più alla figura d'onde è stata dedotta, ma ad altra figura correlativa alla medesima, in cui le quantità che hanno cambiato segno saranno divenute inverse. Per esempio siasi ad $m+x'$ sostituito $m-x''$; posto $q=m+x'$, e fatto quindi il detto cambiamento, sarà $q=m-x''$: or dalla prima condizione si ricava $x'=q-m$, e dalla seconda $x''=m-q$; dunque x' ed x'' sono inverse.

26. Facciamo un'applicazione di questa teoria alla seguente ricerca. Condotta da un punto D (fig. 13) la retta DA' in modo che incontri i lati BC, AC del triangolo ABC, si ottiene il triangolo A'B'C: nel supposto che questi due triangoli abbiano fra loro la ragione t, proponiamoci di determinare una equazione che colleghi tutti gli elementi della figura che da questa costruzione risulta.

Varie sono le posizioni che può avere il punto D; ne considereremo quattro, secondochè esso è situato 1.° nell'angolo BCP (fig. 13); 2.° nell'angolo BCA (fig. 14); 3.° nell'angolo ACN (fig. 15); 4.° nell'angolo BCP (fig. 16), allorquando la retta da condursi pel punto D incontra i lati AC, BC nel loro prolungamento.

Conduciamo pel punto D una parallela DP al lato BC in tutte le figure corrispondenti ai summentovati casi, e poniamo $BC=a$, $AC=b$, $B'C=a'$, $A'C=b'$, la parallela $DP=p$, la distanza tra i punti C e P, ovvero $CP=d$.

Siccome $\frac{A'CB'}{ACB}=\frac{B'C.A'C}{BC.AC}$, ne segue $t=\frac{a'b'}{ab}$;

donde ricavasi

$$tab-a'b'=0;$$

ma $\frac{B'C}{DP}=\frac{A'C}{A'P}$, o $\frac{a'}{p}=\frac{b'}{A'P}$, ed $a'=\frac{b'p}{A'P}$; dunque

$$t a b \,.\, A'P - p b'^2 = 0,$$

proprietà, o condizione comune alle quattro figure che consideriamo; ma

nella fig. 13 si ha $A'P = b' + d$

nella fig. 14 $A'P = b' - d$

nella fig. 15 $A'P = d - b'$

nella fig. 16 $A'P = d - b'$

e però le equazioni corrispondenti ai quattro noverati casi sono

$$t a b \,(b' + d) - p b'^2 = 0 \;.\;.\; (\text{I})$$

$$t a b \,(b' - d) - p b'^2 = 0 \;.\;.\; (\text{II})$$

$$t a b \,(d - b') - p b'^2 = 0 \;.\;.\; (\text{III})$$

$$t a b \,(d - b') - p b'^2 = 0 \;.\;.\; (\text{IV})$$

Ma seguendo la teoria precedente, potremo fare a meno di determinare l'equazione comune alle figure, e quindi le condizioni per cui differiscono: dopo avere dedotta da una figura qualunque (ed è chiaro che conviene prescegliere la più semplice) la relativa equazione, determineremo le quantità variabili, e tra queste cercheremo quelle che nel passaggio d'una figura all'altra diventano inverse: ad esse cambieremo il segno, e così avremo tutte le equazioni che si richiedono.

Supponiamo di avere dedotta dalla figura 13 l'equazione (I), ed osserviamo che delle quantità t, a, b, d, p, b' in essa contenute, le sole d, p, b' sono suscettibili di variare, quando si cambia una figura nelle altre.

Facendo muovere nella figura 13 la D P parallelamente a se stessa onde venga a prendere la posizione che si osser-

va nella figura 14, la sola $d = CP$ passa per lo zero nel punto C; inoltre nella figura 13, $CP = AP - AC$ e nella figura 14, $CP = AC - AP$; dunque cambieremo nella equazione (I) il segno a d, ed avremo l'equazione propria della figura 14; in fatti ciò è dimostrato dall' equazione (II).

Facendo muovere nella figura 14 la stessa DP parallelamente a se stessa, onde prenda la posizione che ha nella figura 15, la sola $p = DP$ passa per lo zero nel punto A'; di più conducendo DN parallela ad AC, si vede che nella figura 14, $DP = BC - BN$, e nella figura 15, $DP = BN - BC$; perciò cambieremo nell' equazione (II) il segno a p, ed avremo l'equazione (III) propria della figura 15.

Finalmente facendo muovere nella figura 13, la DA' intorno a D, onde prenda la posizione che essa ha nella fig. 16, la sola $b' = A'C$ passa pel lo zero nel punto C; inoltre nella figura 13, $A'C = AC - AA'$, e nella figura 16, $A'C = AA' - AC$; perciò cambiando nell' equazione (I) il segno a b', si ottiene l'equazione (IV) propria della figura 16.

Le equazioni (III) (IV) sono identiche; ciascuna di esse esprime dunque proprietà comuni alle due figure 15 e 16.

È manifesto che invece di passare dalla figura 13 alla 14, dalla figura 14 alla 15, dalla figura 13 alla 16, avremmo potuto tenere qualunque altr'ordine, che più ne piacesse, poichè i resultati sarebbero stati gli stessi.

Or per coloro che volessero accertarsene col calcolo, porremo qui appresso i valori correlativi delle quantità variabili d, p, b' corrispondenti alle figure 13, 14, 15, 16.

fig. 13 $d = AP - AC$, $p = BC - BN$, $b' = AC - AA'$

fig. 14 $d = AC - AP$, $p = BC - BN$, $b' = AC - AA'$

fig. 15 $d = AC - AP$, $p = BN - BC$, $b' = AC - AA'$

fig. 16 $d = AP - AC$, $p = BC - BN$, $b' = AA' - AC$.

27. Anche il seguente problema pone in più chiara luce la teoria medesima.

Sia ABC un triangolo (fig. 17); AD una perpendicolare abbassata dal vertice A sul lato opposto; dal punto D conduciamo le rette DG, DF respettivamente parallele ai lati AB, AC, e proponiamoci di determinare la ragione del triangolo ABC al parallelogrammo AFGD che da questa costruzione resulta.

Dal punto D si abbassi la perpendicolare DE sul lato AC; dai triangoli simili DEC, ADC ricaveremo

$$DE = \frac{DC \times AD}{AC}.$$

Dai triangoli ABC, BFD parimente simili, ricaveremo

$$DF = \frac{AC \times BD}{BC}.$$

L'area del parallelogrammo AFGD è $P = DF \times DE$; quella del triangolo è $T = \frac{1}{2} BC \times AD$; se sostituiremo i suindicati valori di DF e DE, avremo

$$\frac{T}{P} = \frac{\overline{BC}^2}{2BD \times DC} \quad \ldots (v)$$

Donde si vede che il triangolo sta al parallelogrammo come il quadrato del lato sul quale è stata abbassata la perpendicolare sta al doppio rettangolo fatto coi segmenti in cui resta diviso esso lato.

Questo rapporto si può ancora esprimere per mezzo di una funzione dei soli lati del triangolo: poniamo $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; avremo

$$BD = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}, \quad DC = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

e quindi con breve calcolo ne risulterà la semplice formula

$$\frac{P}{T} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{b^2 - c^2}{a^2}\right)^2 \ldots \text{(VI)}$$

di cui il termine

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b^2 - c^2}{a^2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{(b+c)(b-c)}{a^2}\right)^2$$

agevolmente si calcola coi logaritmi. La figura 17 sulla quale abbiamo istituito il nostro ragionamento suppone che la perpendicolare AD cada sulla base BC, ovvero che gli angoli B e C sieno acuti; or prendiamo a considerare il caso di B, o C ottuso.

Muovasi la perpendicolare AD parallelamente a se stessa verso M; quando il punto D avrà oltrepassato il vertice C, l'angolo ACB sarà ottuso, e gli elementi della figura 17 si disporranno nel modo che si vede sulla figura 18; BD, DC non potranno più chiamarsi segmenti della base BC; bensì saranno sempre le distanze del punto D ai vertici B e C del triangolo. Muovasi in secondo luogo la perpendicolare AD parallelamente verso N; quando l'angolo ABC sarà diventato ottuso, gli elementi della figura 17 si disporranno nel modo che si vede sulla figura 19; le rette BD, DC saranno anche in questo caso le distanze de' vertici B e C al punto D.

Nel primo caso DC passa per lo zero, ed abbiamo

nella fig. 17 $DC = DM - CM$

nella fig. 18 $DC = CM - DM$.

Nel secondo caso passa per lo zero BD, e si ha

nella fig. 17 $BD = DN - BN$

nella fig. 19 $BD = BN - DN$.

Or si osservi che introdotta nella formula (v) la condizione $BC = DC + BD$ per esprimere la necessaria dipendenza che BD, DC hanno fra loro sulla figura 17, si trova

$$\frac{P}{T} = 1 - \frac{\overline{DB}^2 + \overline{DC}^2}{a^2} \ldots \text{(vii)}$$

la quale espressione, quand' anche in luogo di BD e CD si ponesse $-DB$, $-CD$, rimarrebbe la stessa; però le formule (v), (vi), (vii) sono comuni alle figure 17, 18, 19: dunque qualunque triangolo gode, rispetto al parallelogrammo inscritto nel modo che abbiamo indicato, della proprietà (v), e delle altre espresse dalle equazioni (vi) e (vii). Ecco come l' esposta teoria può servire ad assegnare le proprietà comuni a più figure, ed a comprovare la generalità delle proposizioni geometriche, allorquando può cader dubbio sull' artifizio della costruzione della figura donde sono state dedotte.

28. Non è però sempre necessario osservare sulla figura se una quantità sia rimasta diretta, o divenuta inversa; perchè se tal quantità sarà una funzione esplicita di altre quantità, cononoscendo la correlazione di queste, sarà facile determinare quella della funzione medesima, ponendo mente alle seguenti regole.

1.° Sia $k = xyz \ldots$; allorquando un numero dispari di fattori $x, y, z, \ldots$ prenderanno valori inversi, k diventerà

inversa; ma k rimarrà diretta, quando il numero de' fattori che prendono valori inversi sarà pari.

Siano $p-q$, $m-n$, $r-s$, ec. i valori dei fattori x, y, z, ec., in modo che abbiasi

$$k=(p-q)(m-n)(r-s)\ldots$$

e supponiamo che x diventi inversa; sarà

$$k'=(q-p)(m-n)(r-s)\ldots.$$

Osservando che

$$(p-q)(m-n)=(mp+nq)-(mq+np) \quad (a)$$
$$(q-p)(m-n)=(mq+np)-(mp+nq) \quad (b)$$

dovremo concludere che questi prodotti hanno valori inversi; dunque anche k e k' sono inverse.

Supponiamo che diventino inverse x ed y; sarà

$$k'=(q-p)(n-m)(r-s)\ldots.$$
$$(q-p)(n-m)=(mp+nq)-(mq+np) \quad (c)$$

i prodotti (a) e (c) hanno valori diretti, dunque k e k' sono in questo caso quantità dirette.

Ora immaginando che i fattori di k siano fra loro moltiplicati due a due, è manifesto che se quelli che cambiano correlazione sono in numero pari, k rimarrà diretta: se al contrario quei che cambiano sono in numero dispari, k diverrà inversa.

2.° Sia $k=\frac{x}{y}$; se diventerà inverso il numeratore, oppure il denominatore, k diventerà pure inversa; e se ambedue i termini diventeranno inversi, k rimarrà diretta.

Siano $m-n$, $p-q$ i valori di x ed y: e supponiamo che diventi inverso il numeratore;

$$k=\frac{m-n}{p-q}=\frac{m}{p-q}-\frac{n}{p-q} \qquad (d)$$

$$k'=\frac{n-m}{p-q}=\frac{n}{p-q}-\frac{m}{p-q} \qquad (e)$$

è manifesto che i valori (d) ed (e) sono inversi.

Supponiamo che diventi inverso il denominatore;

$$k=\frac{m-n}{p-q}=\frac{(m-n)(p-q)}{(p-q)^2}=\frac{(m-n)p}{(p-q)^2}-\frac{(m-n)q}{(p-q)^2} \qquad (f)$$

$$k'=\frac{m-n}{q-p}=\frac{(m-n)(q-p)}{(q-p)^2}$$

ma $(q-p)^2=(p-q)^2$; dunque

$$k'=\frac{(m-n)q}{(p-q)^2}-\frac{(m-n)p}{(p-q)^2} \qquad (g)$$

donde si vede che i valori (f), (g) sono inversi.

Finalmente supponiamo che ambedue i termini della frazione prendano valori inversi;

$$k=\frac{m-n}{p-q}=\frac{(m-n)(p-q)}{(p-q)^2}=\frac{(mp+nq)-(mq+np)}{(p-q)^2} \qquad (h)$$

$$k'=\frac{n-m}{q-p}=\frac{(n-m)(q-p)}{(q-p)^2}=\frac{(mp+nq)-(mq+np)}{(p-q)^2} \qquad (i)$$

cosicchè i valori (h) ed (i) sono diretti.

29. Posto ciò, in quanto a $k=(m-n)(p-q)(r-s)\ldots$, è manifesto che se uno, o più fattori diventeranno inversi, le rette che essi rappresentano passeranno per lo zero, e perciò anche il loro prodotto, ed in conseguenza il valore di k passerà per lo zero.

Relativamente a $k = \frac{m-n}{p-q}$ si osservi che diventando inverso il numeratore, esso passerà per lo zero con k; diventando inverso il denominatore, esso passerà per lo zero, e k, che allor resulta uguale ad $\frac{m-n}{0}$, passerà per l' infinito; finalmente diventando inversi ambedue i termini di $\frac{m-n}{p-q}$, k passerà per lo zero, e per l' infinito.

30. A schiarimento di ciò, supponiamo che avendo abbassata dall' estremità M (fig. 20) dell' arco MN la perpendicolare MP sul raggio BN che passa per l' altra estremità, e condotta la tangente MT sino all' incontro del raggio medesimo prolungato, siasi ottenuta la proporzione

$$MT : MB = MP : PB$$

e quindi, fatto $MB = 1$,

$$MT = \frac{MP}{PB}.$$

Se per M si tira la retta MQ parallela ad NB, avremo $MP = DB - DQ$, $PB = NB - NP$, e quindi

$$MT = \frac{DB - DQ}{NB - NP};$$

ma ciò suppone che l' arco NM sia minore della quarta parte della circonferenza; se l' arco fosse NMM', o NM'M'', o NM'M''M''', e si ripetesse nel secondo, nel terzo e nel quarto quadrante la costruzione medesima che abbiamo fatta nel primo, MT che nel primo quadrante ha un valore così indicato

$$MT = \frac{MP}{PB} = \frac{DB - DQ}{NB - NP} \quad (k)$$

nel secondo diverrebbe

$$M'T' = \frac{M'P'}{P'B} = \frac{DB - DQ'}{NP' - NB} \quad (l)$$

nel terzo diverrebbe

$$M''T'' = \frac{M''P''}{P''B} = \frac{DQ'' - DB}{NP'' - NB} \cdot \quad (m)$$

e finalmente nel quarto sarebbe

$$M'''T''' = \frac{M'''P'''}{P'''B} = \frac{DQ''' - DB}{NB - NP'''} \cdot \quad (n)$$

dove si vede che in (l) il denominatore è diventato inverso, in (n) è diventato inverso il numeratore, in (m) sono diventati inversi ambedue i termini.

Ora se il punto M si muove sulla circonferenza affinchè l'arco NM prenda tutte le rammentate grandezze, innanzi che esso punto giunga in M', la MT prenderà un valore infinito in D; innanzi che esso giunga in M'', la M'T' si ridurrà a zero in A; finalmente prima che esso giunga in M''', la M''T'' prenderà di nuovo un valore infinito in C; e ciò mostra in fatto quanto abbiamo asserito qui sopra. Nella stazione in D, $NP = NB$, $MT = \frac{DB}{0}$; nella stazione in A, $DB = DQ'$, $M'T' = 0$; e nella stazione in C, $DQ'' = DC$, $NP'' = NB$, $M''T'' = \frac{DB}{0}$.

CAPITOLO III.

Dell' ufficio dei segni.

31. Abbiamo detto che l'equazione d'una figura può applicarsi ad una sua correlativa cambiando il segno a quelle quantità che nella trasformazione della prima figura nell'altra divengono inverse. Questo principio può altrimenti enunciarsi dicendo, che se il valore di una qualunque quantità è positivo, il valore inverso della medesima dovrà esser negativo, e reciprocamente: per conseguenza bisogna ritenere che due valori di una quantità sieno inversi, allorchè hanno segni contrarj, e diretti, allorchè hanno il medesimo segno, sia pur questo negativo; la qual cosa accade quando ambedue sono inversi rispetto al valore della quantità corrispondente in una terza figura correlativa.

Sieno a e b due quantità, p il loro prodotto, q il quoziente della prima per la seconda; i valori inversi delle quantità medesime potranno essere espressi da $-a$, $-b$, $-p$, $-q$: frattanto per le regole dimostrate avremo

$$-a \times +b = -p, +a \times -b = -p, -a \times -b = +p$$

$$\frac{-a}{+b} = -q, \frac{+a}{-b} = -q, \frac{-a}{-b} = +q;$$

Quindi è che per la teoria dei valori correlativi delle quantità, vengono stabilite due convenzioni le quali si uniformano allo scopo primario dell'algebra, il quale è di generalizzare i principj e i risultamenti a cui essi conducono: una di queste convenzioni è quella per cui si dà una speciale esistenza alle quantità negative, e questa è neces-

aaria per generalizzare il significato dei segni; l'altra è quella per cui le quantità negative possono assoggettarsi alle operazioni aritmetiche, come si pratica per le quantità assolute: e questa è conseguente, e si ammette nel calcolo per pura induzione.

32. Tal distinzione di quantità dirette ed inverse ora identificata con quella di quantità positive e negative non dee però farci credere che possano le dirette, o le inverse considerarsi come tali assolutamente, e indipendentemente le une dalle altre. La precedente teoria suppone che in ogni quantità si consideri la *grandezza assoluta*, ed il *modo di combinazione* con le altre quantità da cui implicitamente dipende; quindi i principj esposti sono soltanto diretti a determinare il cambiamento che ha luogo nella combinazione delle quantità di una equazione corrispondentemente alle varie trasformazioni della figura a cui essa è addetta. Questo cambiamento abbiamo veduto esser quello della correlazione delle quantità medesime, la quale per alcune di esse avvien che sia diretta, per altre inversa; ond'è che i valori fra loro inversi non rappresentano che due diversi stati della medesima quantità, e prescindendo dalle idee geometriche, potremo dire che questi valori son quelli di una quantità assoluta, la quale talora avvien che sia positiva, talora negativa, conformemente alle trasformazioni che comporta la funzione in cui implicitamente si trova, allorquando vuolsi estendere la funzione medesima ai *quesiti correlativi* con quello da cui ha avuto origine.

33. Fermi a questi principj potremo fare un passo di più nella teoria delle figure correlative; perchè, sebbene sia stato indicato il modo di ricavare dall'equazione propria di una figura, tutte quelle che corrispondono alle sue corre-

lative, nondimeno or siamo in grado di vedere, che una sola equazione dee bastare ad esprimerne tutte le possibili correlazioni, allorquando si conosce la figura primitiva da cui essa è stata desunta; infatti, se esprimendo algebricamente le proprietà di grandezza d'una figura, si considerano come positive tutte le quantità che voglionsi porre in calcolo, è chiaro che tutte quelle le quali in conseguenza d'una trasformazione della figura medesima diventano inverse, si dovranno considerare come negative; e tostochè questa equazione risoluta rapporto ad una quantità darà un risultato negativo, dovremo intendere che essa quantità debba avere una situazione diversa da quella assegnatale nella figura primitiva, e precisamente tale da renderne il suo valore inverso. La difficoltà dell'operazione consiste nel determinare questa situazione, ma ecco un mezzo che agevola alquanto il tentativo. Posto che x sia l'ottenuta quantità negativa, $x = -a$, si cambi nell'equazione primitiva x in $-x$, e quindi prendendo norma dall'equazione stessa che ne risulta, si trasformi la figura in modo che possa convenirle questa equazione. Insorge, è vero, altra difficoltà intorno al modo di effettuare tale trasformazione, ma l'esercizio suggerirà all'uopo tutto ciò che malagevolmente potrebbero indicare i precetti su questo proposito. Laonde non sarà inopportuno il seguente esempio.

Abbiamo ricavato dalla figura 10 (21)

$$\overline{AB}^2 = 2\,\overline{AC}^2 - 2\,AC \times CD;$$

risolvendo quest' equazione rapporto a CD, s'ottiene

$$CD = \frac{2\,\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2}{2\,AC}.$$

Or se sarà $\overline{AB}^2 > 2\,\overline{AC}^2$, CD risulterà negativa,

$$CD = -\frac{\overline{AB}^2 - 2\overline{AC}^2}{2AC},$$

e la figura dovrà esser cambiata in modo che questa retta CD risulti inversa. Perciò ponendo nell'equazione primitiva — CD in luogo di CD, avremo

$$\overline{AB}^2 = 2\overline{AC}^2 + 2AC \times CD,$$

concordemente alla condizione $\overline{AB}^2 > 2\overline{AC}^2$, ovvero $\overline{AB}^2 > \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$; ma questa condizione mostra che nel triangolo ABC l'angolo opposto ad AB debb' essere ottuso, e che la perpendicolare BD dee cadere sul prolungamento di AC; dunque la figura 11 è quella che si trova in armonia colle condizioni del problema.

34. Queste nozioni condurranno frattanto alla più vera interpretazione delle *soluzioni negative*, ove si abbiano presenti i canoni da noi stabiliti per la risoluzione dei problemi geometrici. In virtù de' canoni medesimi supposta determinata l'incognita, e costrutta ipoteticamente la figura dal problema richiesta, deduconsi le sue necessarie proprietà di grandezza, queste si traducono in equazione, e finalmente tal'equazione si risolve. Or può avvenire che la figura ipotetica non concordi colle condizioni del problema, ma che sia in correlazione inversa con quella che si richiede: in tal caso se risolveremo l'equazione rapporto ad una delle quantità, che in essa hanno un valore inverso rispetto a quello, che corrispondentemente ai dati dovrebbero avere, otterremo un risultato negativo; per rettificare il quale sarà d'uopo cambiare nell'equazione il segno alla medesima quantità, e modificare convenientemente la figura. L'esempio precedente ci offre il mezzo di rendere queste idee più luminose.

Essendo il valore della corda $AB = 1\frac{3}{5}$ ed il raggio $= 1$, determiniamo il valore della distanza CD.

Supponiamo che l'analisi diretta alla risoluzione del problema sia stata istituita sulla fig. 10; troveremo

$$CD = \frac{2\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2}{2AC};$$

e fatto $AC = 1$, $AB = \frac{8}{5}$, sarà $CD = -\frac{7}{25}$; donde è chiaro che in questo caso la figura 10 non concorda colle condizioni del problema. Or mediante il cambiamento del segno di CD nell'equazione, vedremo che essa non può convenire che alla figura 11, dietro la quale avremmo ottenuto

$$CD = \frac{\overline{AB}^2 - 2\overline{AC}^2}{2AC}$$

donde si ricava $CD = \frac{7}{25}$.

35. Talvolta l'equazione avrà più radici, alcune positive, altre negative; e dalle cose dette precedentemente risulta che le prime concorderanno colla figura dalla quale è stata desunta l'equazione, e risolveranno il problema dato; e le altre si riferiranno a figure che avranno una correlazione inversa colla precedente, e potranno corrispondere a quesiti non identici, ma soltanto analoghi al quesito proposto; per determinare i quali, seppur ve n'ha, sarà d'uopo cambiare nell'equazione il segno all'incognita, e cercare una seconda figura a cui possa convenire la risultante equazione: le speciali proprietà di questa figura indicheranno le condizioni del nuovo problema corrispondenti al cambiamento di segno dell'incognita.

Se fosse proposto di dividere una retta data a in due parti x ed $x' = a - x$, fra le quali un' altra retta data b sia media proporzionale, sarebbe

$$x : b = b : a - x$$

$$x^2 - ax + b^2 = 0$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$$

qui vedesi chiaramente che i due valori di x sono ambedue positivi, poichè $\frac{a}{2} > \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$; perciò essi convengono ambedue al quesito: infatti se prendesi il segno $+$, abbiamo

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$$

$$x' = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$$

se prendesi il segno $-$, abbiamo pure

$$x = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$$

$$x' = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$$

donde si scorge che in ambedue i casi si hanno per x ed x' i medesimi valori.

Lo stesso accade relativamente ai due valori di x dati dalla formula (D), (n.° 7, IV); poichè dovendo essere $s > a$, sarà necessariamente $s > \sqrt{(2a^2 - s^2)}$, lo che può dimostrarsi mediante un semplicissimo calcolo.

Ma dal quesito in cui si propone di dividere una retta

AB $= a$ (fig. 5) in media ed estrema ragione (n.° 7, V), il quale si traduce nella proporzione

$$a : x :: x : a - x,$$

ovvero nell'equazione

$$x^2 = (a - x)\, a$$

abbiamo le due radici

$$+\left(\sqrt{(a^2 + \frac{a^2}{4})} - \frac{a}{2}\right); -\left(\sqrt{(a^2 + \frac{a^2}{4})} + \frac{a}{2}\right)$$

delle quali la prima soltanto corrisponde al quesito proposto, ed è uguale ad AD. In quanto alla seconda, se prescindiamo dal segno, osserveremo che essendo $\sqrt{(a^2 + \frac{a^2}{4})} =$ AC, ed $\frac{a}{2} =$ CD, il suo valore sarà indicato da AD′, talmentechè sarà

$$-\left(\sqrt{(a^2 + \frac{a^2}{4})} + \frac{a}{2}\right) = -\text{AD}',$$

e cambiando il segno alla x nell'equazione primitiva, sarà

$$x^2 = (a + x)\, a$$

donde si ricava

$$a : x :: x : a + x$$

in cui il valore di x è indicato da AD′.

Pertanto corrispondentemente ai due valori AD ed AD′ di x abbiamo queste due proporzioni

$$\text{AB} : \text{AD} :: \text{AD} : \text{AB} - \text{AD}$$

$$\text{AB} : \text{AD}' :: \text{AD}' : \text{AB} + \text{AD}'$$

Il valore di AD corrisponde al quesito proposto, nel quale altro non si richiede che una media proporzionale tra una

retta data, e la differenza tra questa e la proporzionale medesima: ed il valore AD′ corrisponderebbe al quesito nel quale si ricercasse una media proporzionale tra la retta data, e la somma di essa con la proporzionale stessa.

36. Proponiamoci di trovare due rette la cui differenza sia a, e tra le quali una retta data b sia media proporzionale.

Esprimendo la più piccola retta per x, l'altra dovrà esprimersi per $a + x$; quindi sarà

$$x : b :: b : a + x$$

$$x^2 + ax = b^2$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(b^2 + \frac{a^2}{4}\right)}$$

il primo valore è manifestamente positivo, ed ove fosse AB $= b$, CB $= \frac{a}{2}$, questo valore verrebbe indicato da AD: talmentechè AD ed AD′ sarebbero le due rette richieste.

Or sostituendo, per l'interpretazione della soluzione negativa, $-x$ ad x, avremo

$$x^2 - ax = b^2$$

donde si ricava

$$x : b :: b : x - a$$

la qual proporzione corrisponde al problema in cui si richiede che b sia media proporzionale tra le rette x ed $x - a$, la cui differenza è a. Per lo che è manifesto che il valore negativo dell'incognita non modifica in verun modo il problema proposto, e che tal valore è quello che noi otterremmo positivo rappresentando con x quella delle due rette da determinarsi che è la più grande.

37. Esistono però le equazioni della forma $x^2 = k$; le quali per la sostituzione di $-x$ in luogo di x non risentono alcun cambiamento; ed esse, poichè i principj esposti non possono prestarsi alla interpretazione della soluzione negativa $x = -\sqrt{k}$, richiedono ulteriori schiarimenti.

Se x fosse una linea di cui si richiedesse la grandezza e la posizione sopra una retta indefinita AB (fig. 21) data, tranne il caso in cui il problema fosse indeterminato, è chiaro che nel risultamento finale $x = \pm\sqrt{k}$ non potremmo avere che la distanza d'un punto ignoto P da un punto M fisso e dato sopra la retta indefinita medesima. Posto $MP = \sqrt{k}$, ed inoltre supponendo $x = y - a$, sarebbe $x = a - y$ l'altro valore di x, senza di che non potrebbero $-\sqrt{k}$ e $+\sqrt{k}$ essere due valori inversi della stessa quantità x; ed è manifesto che corrispondentemente a questi due valori di x si hanno i due valori di y,

$$y = a + MP,\ y = a - MP.$$

Ciò posto, riflettendo che a è tal quantità di cui dobbiamo disporre in modo che le due condizioni

$$x = y - a,\ x = a - y,$$

ovvero le altre due

$$y = a + MP,\ y = a - MP,$$

possano successivamente verificarsi, e che nulla ci vieta di immaginare un punto N della retta AB talmente remoto da M, che sia $NM > MP$, avremo diritto di fare $NM = a$, ed

$$y = NM + MP,\ y = NM - MP;$$

cosicchè avendo preso $MP' = MP$, queste due condizioni diverranno $y = NP$, $y = NP'$. Quindi sostituendo la prima

$y = NP$ nell'altra $x = y - a$ da cui è stata dedotta, troveremo $x = MP$, e sostituendo la seconda $y = NP'$ nell'altra $x = a - y$, troveremo $x = MP'$; donde segue che MP e MP' sono i due valori di x che soddisfano ugualmente alla equazione $x^2 = k$.

Ciò si rende pur chiaro pel principio, che onde il valore $y - a$ di x si cangi in $a - y$, è d'uopo che il punto P muovendosi su la retta AB passi pel punto M, ove x è zero, e si collochi in P' a tal distanza da M, a quanta lo è P.

Consegue frattanto che allorquando le condizioni d'un problema sono ridotte a determinare sopra una retta data di posizione, la distanza x d'un punto ignoto da un altro fisso e dato su la stessa retta, se l'equazione primitiva per la sostituzione di $-x$ in luogo d'x non risente alcun cambiamento, ovvero se il calcolo nel suo finale risultamento ne dà $x = \pm d$, è forza concludere che due sono i punti, i quali soddisfanno alla richiesta condizione, che essi sono posti su la retta data ad ugual distanza dal punto fisso, essendo uno a destra, l'altro a sinistra.

38. In applicazione di questo principio supponiamo che essendo dati due punti A e B (fig. 22), ed una retta indefinita CD, debbasi descrivere una circonferenza che passi pei due punti medesimi, e risulti tangente alla retta.

Il problema si riduce alla ricerca del punto di contatto, poichè quando si avesser tre punti della circonferenza, l'operazione non presenterebbe difficoltà.

È manifesto che la retta la quale unisce i due punti dati debb' essere una corda della circonferenza medesima. Or può avvenire che questa corda risulti parallela alla retta data CD, ed in tal caso si ottiene il punto di contatto conducendo una perpendicolare pel mezzo di essa corda. Non

risultando la corda parallela a CD, sufficientemente prolungata incontrerà la retta indefinita in un punto M; AM sarà una secante della circonferenza, e BM la sua parte esterna rispetto alla tangente CD.

Quindi rappresentando con x la lunghezza della tangente medesima da M sino al punto di contatto, avremo

$$AM : x :: x : BM$$

$$x^2 = AM . BM$$

$$x = \pm \sqrt{AM . BM}$$

Cosicchè descrivendo sopra AM come diametro la semicirconferenza AFM, ed inalzando la perpendicolare BF, sarà

$$x = \pm FM$$

Da ciò risulta che due sono i punti che si ricercano, i quali si ottengono prendendo le distanze MP, MP′ uguali ad MF; e per conseguenza due sono le circonferenze che risolvono ugualmente il proposto problema. I centri di queste circonferenze si troveranno l'uno a destra, l'altro a sinistra della retta AM.

39. Alcuna volta avviene però che il valore negativo $x = -\sqrt{k}$ desunto dall'equazione $x^2 = k$, sia rispetto al problema che ci ha data l'equazione medesima, affatto insignificante. Per esempio, se essendo dato un quadrilatero ABCD (fig. 23), fosse proposto di costruirne un altro simile, ed in maniera che questi due quadrilateri fossero tra loro nella ragione di $m : n$; indicando con x il lato del quadrilatero da costruirsi omologo ad $AB = a$, avremmo

$$x^2 : a^2 = m : n$$

donde si ricava

$$x = \pm a \sqrt{\frac{m}{n}};$$

e poichè non può esistere che una sola retta la quale possa soddisfare alle richieste condizioni, così è manifesto essere il valor negativo affatto insignificante.

40. In varj casi le soluzioni negative riescono insignificanti, non per la natura del problema, come nel caso precedente, ma per qualche condizione del problema medesimo. Per esempio essendo data la corda $BC = a$ (fig. 24) comunque condotta in un circolo, proponiamoci di condurre pel punto A ove l'arco BAC è incontrato dalla perpendicolare $AF = b$ inalzata sul mezzo di BC, una nuova corda AK in modo, che la parte HK intercetta fra la corda BC e la circonferenza, sia uguale ad una retta data c.

Avendo preso per incognita $AH = x$, osserveremo che per le proprietà delle corde che si tagliano nel circolo si ha

$$AH.HK = BH.HC = (BF + FH)(BF - FH)$$
$$= \overline{BF}^2 - \overline{FH}^2 = \overline{BF}^2 - (\overline{AH}^2 - \overline{AF}^2).$$

Laonde avremo l'equazione

$$cx = \frac{a^2}{4} - (x^2 - b^2)$$

e quindi

$$x = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(b^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4}\right)}$$

Per costruire il valor positivo di x converrà inalzare alla estremità di AC una perpendicolare, prendere di questa perpendicolare una parte CI uguale alla metà di c, e tirare AI; dipoi fare IG uguale ad IC: il valor positivo di x sarà indicato da AG. Per lo che se fatto centro in A con

raggio uguale ad AG descriveremo un arco, esso incontrando BC in H, determinerà la posizione della richiesta corda AK.

In quanto al valor di x negativo, osserveremo che cambiando x in $-x$ l'equazione primitiva diventa

$$cx = x^2 - \left(b^2 + \frac{a^2}{4}\right);$$

ovvero

$$cx = x^2 - \overline{AC}^2,$$

per lo che si esige che sia $x > AC$; infatti il valor negativo di x è indicato da $-(IC+IA)$, ossia da $-AL$. In conseguenza esso valore corrisponde all'ipotesi che la retta condotta da A incontri BC nel suo prolungamento, cioè fuori della circonferenza. Cosicchè se avverrà che le condizioni del problema esigano che la retta da condursi incontri la BC dentro la circonferenza, la detta soluzione negativa dovrà essere rigettata come insignificante.

41. La soluzione del precedente problema fa manifesto come possa talvolta avvenire che il grado dell'equazione nata dalla traduzione del problema sia minore del numero delle soluzioni di cui il problema stesso è suscettibile: imperocchè nel caso presente, sebbene l'equazione non ascenda che al secondo grado, il problema ha realmente quattro soluzioni, cioè le due che abbiamo trovate nelle rette AK ed AL poste alla destra di AF, ed altre due simili nelle rette AK′ ed AL′ poste alla sinistra della AF medesima. E qui occorre osservare che il grado dell'equazione dipende il più delle volte dalla scelta dell'incognita: infatti prendendo per incognita $FH = y$, avremmo

$$\overline{FH}^2 = \overline{AH}^2 - \overline{AF}^2.$$

e quindi

$$y^2 = x^2 - b^2$$

$$y = \pm\sqrt{\left[\left(-\frac{c}{2} \pm \sqrt{(b^2 + \frac{c^2}{4} + \frac{a^2}{4})}\right)^2 - b^2\right]}$$

dalla qual formula si hanno le quattro soluzioni suindicate, ed è facil vedere che le radici positive sono indicate da FH ed FL, e le negative da rette uguali, quali sono FH′ ed FL′, prese in senso contrario.

42. Ciò che abbiamo detto fin qui non concerne che l'interpretazione delle soluzioni negative; riman che si dica alcuna cosa intorno alle soluzioni che presentano dei simboli immaginarj, ed intorno al modo d'interpretarli.

A tal oggetto proponiamoci di determinare sopra una retta data AB (fig. 25) un punto K, in guisa che il prodotto dei due segmenti AK, e KB sia uguale alla metà del quadrato di AB.

Poichè non sappiamo se il punto K debba trovarsi sulla retta stessa AB, o sopra il suo prolungamento, faremo il calcolo in una delle due ipotesi; supporremo, per esempio, che K cada tra A e B.

Fatto AK $= x$, AB $= a$, sarà

$$x\,(a - x) = \frac{a^2}{2}$$

quindi avremo

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{2} = 0$$

donde si ricava

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-\frac{a^2}{4}}$$

cioè il valore di x risulta immaginario. Da ciò non bisogna concludere che il problema sia assurdo; imperocchè

l'assurdità della formula può provenire dall'avere situato il punto K in tal modo che la figura ipotetica sopra cui abbiamo istituito il ragionamento, non si trovi in armonia con le condizioni del problema. Infatti supponendo che il punto da determinarsi sia sopra il prolungamento BG della retta data, per esempio in K′, allora, essendo $AK' = x$, avremo

$$x(x-a) = \frac{a^2}{2}$$

$$x^2 - ax - \frac{a^2}{2} = 0$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

nel qual valore di x non compariscono quantità immaginarie.

La prima radice essendo positiva, risolve il quesito di cui si tratta conformemente all'ipotesi che il punto richiesto sia sul prolungamento BG di AB; essa si costruisce inalzando nel mezzo C di AB una perpendicolare $CD = AC$ e tirando AD; quindi inalzando sopra AD un'altra perpendicolare $ED = CD$, e tirando AE; finalmente aggiungendo ad AE, $EF = \frac{a}{2}$; AF così determinata indicherà il punto K′ per mezzo dell'arco FK′ descritto da A come centro con raggio AF.

Per l'interpretazione poi dell'altra radice il cui valore è indicato da $-(AE - EF)$, ovvero da $-AF'$, cambieremo il segno ad x, e porremo la figura in armonia coll'equazione che ne risulta. Fatto tal cambiamento, l'equazione precedente diventa

$$x(x+a)=\frac{a^2}{2}$$

dalla quale si scorge che bisogna supporre il punto da determinarsi posto sul prolungamento AI di AB. Questo punto è K'', e si determina per mezzo dell'arco F'K'', descritto da A come centro, e col raggio AF'.

43. Qui è opportuno fare alcune osservazioni. Sappiamo dall'algebra che una equazione è assurda, tostochè risoluta rapporto ad una delle quantità di cui è funzione, dà luogo ad un qualche simbolo immaginario. Ma dalla sola assurdità della equazione non bisogna inferire, senza ulteriore esame, che il quesito donde l'equazione medesima è stata desunta sia anch'esso assurdo, cioè che non ammetta alcuna soluzione; perocchè il simbolo immaginario può ben provenire dalla incompatibilità delle condizioni del problema con la figura sulla quale è stato fatto il ragionamento. Infatti non essendo possibile dividere una retta AB in due parti, che moltiplicate formino un rettangolo uguale alla metà del suo quadrato (poichè il massimo rettangolo che si può fare con le due parti di AB è il quadrato della sua metà), la figura che abbiamo fatta dietro l'ipotesi che K cada tra A e B ha dato luogo ad un simbolo immaginario: lo che prova che assurdo sarebbe il problema ove, come condizione *indispensabile*, si volesse K tra A e B; ma che, tranne questo caso, assurda è l'ipotesi come quella che rende lo stato del problema incompatibile con lo stato della figura. Non bisogna adunque perdere di vista che l'equazione è la fedel traduzione delle condizioni del problema unite alle ipotesi su le quali si basa il ragionamento; ed allorchè le ipotesi non concordano con le condizioni, l'equazione divenendo assurda, dà necessariamente

luogo a simboli immaginarj. Allora è d'uopo correggere prima l'equazione medesima in modo che sparisca l'immaginarietà, e quindi le ipotesi, ossia la figura, in modo tale che questa equazione possa esprimere la legittima traduzione delle sue proprietà di grandezza. Nella equazione precedente tal correzione si è fatta col sostituire $x(x+a)$ ad $x(a-x)$, cioè cambiando il segno alla seconda potenza dell'incognita.

Può però avvenire che le condizioni stesse del problema sieno tra loro veramente incompatibili, ovvero che diano occasione ad operazioni impossibili, ed in questo caso qualunque sia l'ipotetica figura da cui ne piacerà trarre l'equazione, sempre avremo nell'ultimo risultamento un simbolo immaginario: dalla natura però di tal risultamento potranno dedursi le modificazioni e correzioni di cui abbisognano le condizioni e i dati del problema.

44. Osserveremo finalmente che v'hanno anche dei casi in cui le equazioni che esprimono condizioni e ipotesi possibili legittimamente collegate tra loro, hanno delle radici reali e positive le quali non possono considerarsi che come soluzioni assurde. Eccone un esempio.

Supponiamo che ABC (fig. 26) sia un triangolo rettangolo in A, di cui si conosca l'ipotenusa $BC=a$, e la somma $AB+AC+AD=b$, de' due lati dell'angolo retto, e della perpendicolare AD condotta dal vertice dell'angolo stesso sulla ipotenusa: proponiamoci di determinare il valore di questa perpendicolare. Ponendo $AB=y$, sarà $AC=b-x-y$. Quindi ricavando dai triangoli simili ABC, ADC la proporzione

$$BC : AB :: AC : AD$$

ovvero

$$a : y :: b - x - y : x$$

ne dedurremo

$$by - xy - y^2 = ax;$$

ricavando poi dal triangolo ABC l'equazione

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

avremo pure

$$a^2 = y^2 + (b - x - y)^2$$

$$2(by - xy - y^2) = x^2 - 2bx - a^2 + b^2$$

e sostituendo ax al trinomio posto nel primo membro, sarà

$$x^2 - 2(a + b)x = a^2 - b^2$$

donde

$$x = a + b \pm \sqrt{(2a^2 + 2ab)}$$

lo che somministra due valori positivi della perpendicolare AD: ora il primo di questi valori è manifestamente assurdo, poichè essendo maggiore di b, non può esser quello della perpendicolare medesima, la quale è minore di ciascun lato AB, AC.

Adunque non basta che la radice dell'equazione sia reale e positiva per concludere che essa necessariamente esprime la soluzione del problema, cioè non basta che le condizioni e le ipotesi sieno concordi, e che l'equazione ne esprima la legittima traduzione; conviene inoltre che la radice soddisfaccia in particolare alle condizioni ed alle ipotesi.

Saggio

D' UN

TRATTATO GENERALE

DI

TRIGONOMETRIA

ESPOSTA

CON METODO ANALITICO

PARTE PRIMA

ELEMENTI DI TRIGONOMETRIA RETTILINEA

CAPITOLO I.

Concetto fondamentale. Origine de' seni.

45. La geometria, prendendo a considerare i triangoli rispetto a quelle proprietà che si riferiscono alla mutua dependenza de' loro sei elementi, cioè dei tre lati e dei tre angoli, viene a dimostrare che un triangolo resta in generale determinato in tutti questi elementi, ogniqualvolta ne son noti tre, purchè fra essi trovisi almeno un lato: inoltre la geometria indica il modo di rinvenire i tre elementi ignoti, col mezzo della riga e del compasso.

La trigonometria poi giunge allo stesso fine, ma con diverso mezzo; imperocchè nel supposto che la grandezza dei lati e degli angoli sia data in numeri, insegna a dedurre il valore degli elementi incogniti dai cogniti mediante il calcolo; e poichè il calcolo che si fa a tale oggetto consiste nella *risoluzione* di varie equazioni, le quali si stabiliscono fra le quantità date, e quelle che ci proponiamo di determinare, perciò allorquando il valore di esse è trovato, si dice che il triangolo è stato *risoluto*, come pure si dice che la *trigonometria insegna a risolvere i triangoli*.

Queste equazioni non possono, com'è chiaro, dipendere che dai rapporti esistenti fra i tre lati ed i tre angoli, o

archi che servon loro di misura. Per determinare tali rapporti, non essendo possibile istituire direttamente il confronto fra i lati e gli archi, elementi eterogenei, sarà d'uopo aver ricorso ad un qualche artificio che valga a stabilire una comunicazione tra loro.

46. Or l'artificio, o mezzo di comunicazione, seppure può così dirsi, tra gli archi e i lati dovrà essere un trovato di tale ordine di rette da sostituirsi agli archi, invariabili rispetto agli archi medesimi, e tali che da esse sia possibile dedurre immediatamente gli archi, e viceversa: inoltre queste rette dovranno avere coi lati del triangolo un rapporto facile a determinarsi, senza di che esse non soddisfarebbero all'oggetto per cui si vogliono impiegare.

47. Posto ciò, sia ABC (fig.27) un triangolo; ad esso circoscrivasi una circonferenza; e quindi facendo centro in A, B, C, col raggio del medesimo circolo si descrivano gli archi MN, M'N', M''N''; essi saranno la misura degli angoli A, B, C del triangolo; e poichè l'angolo iscritto ha per misura la metà dell'arco intercetto fra i suoi lati, è manifesto che gli archi BDC, AEC, AFB saranno respettivamente doppj de' detti archi MN, M'N', M''N''; donde segue che i lati BC, AC, AB del triangolo si potranno considerare come corde dei doppj degli archi medesimi MN, M'N', M''N'', che misurano gli angoli respettivamente opposti; cosicchè potremo stabilire la proporzione

$$BC : AC : AB :: \text{corda } 2A : \text{corda } 2B : \text{corda } 2C.$$

La corda è invariabile per rapporto all'arco cui appartiene, e dato l'arco, si trova immediatamente la corda, come data la corda ed il raggio, si trova l'arco corrispondente; inoltre

questa proporzione dimostra che i lati del triangolo stanno fra loro come le corde dei doppj degli archi che misurano gli angoli opposti. In vece delle corde si possono impiegare le loro metà, ed è manifesto che

$$BC : AC : AB = \tfrac{1}{2} \text{ corda } 2A : \tfrac{1}{2} \text{ corda } 2B : \tfrac{1}{2} \text{ corda } 2C.$$

Ma se dall'estremità M dell'arco MN si abbassa una perpendicolare MP sul lato AB, che è quanto dire *sul raggio che passa per l'altra estremità*, essa perpendicolare sarà la metà della corda A; infatti prolungando MP perpendicolare al raggio AN, e l'arco MN sino al loro incontro in Z, dovrà risultare MP = PZ, ed arco MNZ = CDB; lo stesso accade relativamente alle perpendicolari M'P', M''P'' abbassate dai punti M', M'': dimanierachè

$$MP = \tfrac{1}{2} \text{ corda } 2A,$$

$$M'P' = \tfrac{1}{2} \text{ corda } 2B,$$

$$M''P'' = \tfrac{1}{2} \text{ corda } 2C,$$

e perciò

$$BC : AC : AB :: MP : M'P' : M''P'';$$

le perpendicolari MP, M'P', M''P'' sono state chiamate *seni* degli archi MN, M'N', M''N'', o degli angoli A, B, C; donde segue che il *seno d'un arco è la metà della corda dell'arco doppio*. Geometricamente esso si ottiene abbassando da una estremità dell'arco una perpendicolare sul raggio che passa per l'altra estremità. Pertanto si può stabilire che *i lati d'un triangolo stanno fra loro come i seni degli angoli opposti*.

48. I seni dunque, poichè soddisfanno alle condizioni indicate al n.° 46, si potranno introdurre nel calcolo in luogo degli archi, per istabilire le equazioni relative alla risoluzione

dei triangoli in generale. E se, come abbiamo già avvertito, un triangolo resta determinato, dati che siano tre de' suoi elementi (fra quali sia un lato), segue che ciascuna di queste equazioni dovrà comprendere quattro di questi elementi almeno, acciocchè essendone dati tre, colla risoluzione delle equazioni medesime si possa trovare il quarto.

49. Or se i dati debbono esser tre, i casi essenzialmente diversi che può offrire la risoluzione d'un triangolo non saranno che quattro, gli elementi dati potendo essere

1.° Due angoli ed un lato.

2.° Due lati e l'angolo opposto ad uno di essi.

3.° Due lati e l'angolo compreso.

4.° I tre lati.

Infatti, indichiamo gli angoli del triangolo colle lettere A, B, C, ed i lati respettivamente opposti colle medesime lettere a, b, c, prese nell' alfabeto minuscolo. Lo scopo della risoluzione d'un triangolo è in generale quello di determinare tre qualunque delle sei quantità A, B, C, a, b, c, conoscendo le altre tre; e siccome sei cose prese tre a tre danno luogo a venti combinazioni diverse, così a prima vista sembrerebbe che fossero venti i casi diversi che offrir può la risoluzione d'un triangolo.

Ma osserviamo che il primo caso, in cui sono dati due angoli e un lato, offre le nove combinazioni seguenti.

A, B, a	A, B, b	A, B, c
A, C, a	A, C, b	A, C, c
B, C, a	B, C, b	B, C, c

Queste non possono dar luogo che ad una sola ricerca, essendo indifferente che i due angoli dati siano A, B, o A, C,

e B, C: infatti dall'equazione

$$A + B + C = 180°$$

deducesi immediatamente il terzo angolo, dati che sieno gli altri due.

Il secondo caso, in cui sono dati due lati e l'angolo opposto ad uno di essi, presenta le sei combinazioni

$$a, b, A \qquad a, c, A \qquad b, c, B$$
$$a, b, B \qquad a, c, C \qquad b, c, C$$

ora è indifferente per la soluzione del problema che sia data l'una, o l'altra combinazione.

Il terzo caso, nel quale sono dati due lati e l'angolo compreso, offre tre combinazioni

$$a, b, C \qquad a, c, B \qquad b, c, A$$

Il quarto ne offre una soltanto, cioè

$$a, b, c$$

Abbiamo dunque nove e sei e tre e una, o diecinove combinazioni; e aggiungendovi quella dei tre angoli

$$A, B, C$$

da cui convien fare astrazione, ne avremo venti distinte in quattro soli casi differenti.

PRIMO CASO

50. Se si conoscono gli angoli A e B (fig. 28), troveremo immediatamente l'angolo C; poichè C è uguale a due angoli retti meno la somma di A e B. Supponiamo che il lato dato sia AB; in virtù del principio stabilito, avremo le due proporzioni

$$\text{sen}\,C : \text{sen}\,A = AB : BC$$

$$\text{sen}\,C : \text{sen}\,B = BA : AC$$

così se verrà dato il valore de' seni degli angoli A, B, C, avremo immediatamente

$$BC = \frac{AB\ \text{sen}\,A}{\text{sen}\,C};\ AC = \frac{AB\ \text{sen}\,B}{\text{sen}\,C}$$

e sarà risoluto il triangolo.

51. I valori dei seni degli angòli ci saranno dati dalle tavole, che sono state espressamente formate a tale uso, e di cui spiegheremo la formazione in seguito. Intanto basti sapere che a costruire queste tavole è stato preso il raggio per unità, e in parti decimali di questa unità sono stati espressi i seni degli archi.

È da avvertire che prendendo il raggio per unità, non è necessario fissarne la grandezza assoluta; perchè i seni degli archi hanno sempre col raggio con cui sono descritti la ragione medesima; infatti facendo centro nel vertice A (fig. 29) dell'angolo MAB, descriviamo gli archi BM, B'M', B''M'', ec. coi raggi AM, AM', AM'', ec.; quindi conduciamo i seni MP, M'P', M''P'', ec.; si vede chiaro che avremo

$$\frac{MP}{AM} = \frac{M'P'}{AM'} = \frac{M''P'}{AM''} = \text{ec.}$$

e nel supposto che AM sia il raggio del circolo a cui si vogliono riferire tutti i seni, porremo AM = 1, e quindi avremo

$$\text{sen}\,A = MP = \frac{M'P'}{AM'} = \frac{M''P''}{AM''} = \text{ec.}$$

donde si vede che introducendo nel calcolo i seni, inten-

diamo di esprimerli mediante i numeri che indicano i rapporti dei loro valori assoluti, o geometrici col raggio. Così ogniqualvolta in una formula, o funzione di seni faremo il raggio = 1, intenderemo di sostituire alle grandezze assolute, o geometriche dei seni medesimi il loro rapporto col raggio assunto per unità.

52. Gli archi s'indicano in parti della circonferenza; e rispetto a ciò, avvertiremo che gli antichi dividevano la circonferenza in 360 parti uguali chiamate *gradi*, il grado in 60 parti uguali chiamate *minuti*, il minuto in 60 *secondi*, ec.: dietro questa divisione il *quadrante*, o la quarta parte della circonferenza, consta di 90 gradi, o di 5400 minuti, o di 324000 secondi. Ma i moderni per seguitare in tutto il sistema decimale hanno stabilito di dividere la circonferenza in 400 gradi, il grado in 100 minuti, il minuto in 100 secondi, e così di seguito: talmentechè il quadrante risulta di 100 gradi, o 10 000 minuti, o 1 000 000 secondi. Nella divisione antica, detta *sessagesimale*, un arco ex. gr. di 25 gradi, 27 minuti, 18 secondi, si scrive così

$$25^{\circ}, 27', 18'';$$

nella nuova centesimale un arco, ex. gr. di 36 gradi, 19 minuti e 42 secondi, si suole indicare così

$$36^{gr}, 1942;$$

oppure, quando si prende il quadrante per unità, in quest' altro modo

$$0^{q}, 361942.$$

« Ciascuna di queste divisioni, dice il Signor Nicollet, ha i suoi particolari vantaggi; la prima a quello dell' antichità ed universalità della sua adozione congiunge l' altro di di-

pendere dal numero 360, che avendo più divisori di 400, fa che si possa esprimere esattamente in gradi un maggior numero di archi. La seconda collegata al nuovo sistema metrico francese, ed alla numerazione decimale, evita l'inconveniente de' numeri complessi, e si presta più facilmente al calcolo » Nelle nostre ricerche adotteremo la divisione sessagesimale, come quella che sembra avere la preferenza dai pratici.

53. È manifesto che gli archi simili MB, M'B', poichè corrispondono ad angoli al centro uguali, contengono un ugual numero di gradi; infatti essi archi sono la medesima frazione della intera circonferenza.

54. Diremo che un arco è *complemento* d'un altro, quando la somma, o la differenza di questi due archi sarà uguale ad un quadrante. Diremo poi che un arco è *supplemento* d'un altro, quando la somma, o la differenza loro sarà uguale a due quadranti. Le medesime denominazioni si adoprano relativamente agli angoli.

55. Ora si osservi che siccome una corda qualunque come MQ (fig. 30) appartiene sempre a due archi MAQ, MBQ, che sommati formano la circonferenza intera; così il medesimo seno MP metà della corda MQ appartiene a due archi AM, MB che insieme fanno due quadranti. Quindi potremo stabilire che *il seno d' un arco è sempre uguale al seno del suo supplemento*.

56. Le corde crescono a misura che crescono gli archi compresi tra 0° e 180°; da questo limite in poi le corde decrescono. Così la corda massima che si può condurre in un circolo è quella dell' arco di 180°, ed essa è uguale al diametro. Segue lo stesso relativamente ai seni: i seni crescono al crescer degli archi compresi tra 0° e 90°; e quando gli

archi crescono da 90° verso 180°, i corrispondenti seni decrescono. Il massimo seno è quello dell'arco di 90°, ovvero del quadrante, ed esso è uguale al raggio.

In conseguenza di ciò non sono stati posti sulle tavole che i seni degli archi compresi nel quadrante; sarebbe stato superfluo ripetere, pei seni degli archi maggiori, i valori dei seni de' loro supplementi.

Nelle tavole si trovano ordinariamente i valori dei seni degli archi che vanno successivamente crescendo di 10 secondi; lo che basta per l'uso che se ne fa. In esse sono distinte due file verticali di numeri, una delle quali contiene gli archi scritti secondo l'ordine di loro crescenti grandezze, l'altra i corrispondenti seni; talmentechè dato un arco in gradi, minuti, ec., se ne trova agevolmente il seno, e dato viceversa il seno, si trova il numero di gradi, minuti, ec., contenuti nell'arco cui spetta.

SECONDO CASO

57. Se si conoscono i lati BC, AC (fig. 28) e l'angolo A opposto al primo, dalla proporzione

$$BC : AC :: \text{sen}\,A : \text{sen}\,B$$

potremo ricavare

$$\text{sen}\,B = \frac{AC\,\text{sen}\,A}{BC}.$$

Sostituendo ad AC, BC, sen A, i loro valori, troveremo quello di sen B, e quindi cercando nelle tavole l'arco corrispondente, otteremo B. Ma poichè ogni seno corrisponde sempre a due archi (55), uno supplementario dell'altro, così saremo in dubbio se l'angolo B sia quello delle tavo-

le, oppure il suo supplemento. Talvolta però ci sarà concesso torre l'ambiguità della soluzione; perchè se l'angolo dato A sarà retto, o ottuso, B dovrà essere acuto; e se essendo A acuto, il lato BC opposto ad A sarà maggiore del lato AC opposto a B, l'angolo B dovrà essere minore dell'angolo A, ed in conseguenza acuto. Cosicchè questa incertezza non avrà luogo che nel caso di A acuto, e di $BC > AC$: infatti, se fatto centro in C (fig. 31), e con raggio uguale a CB si descrive un arco, esso incontrerà AB in B′: quindi conducendo CB′, si vedrà che i due triangoli ACB, ACB′ hanno il lato AC e l'angolo A comuni, e $CB = CB'$; in conseguenza quando sia proposto di risolvere il caso con questi dati, il valore di B sarà incerto, e potrà essere, o l'angolo ABC, oppure l'angolo AB′C suo supplemento. Trovato l'angolo B, avremo immediatamente il valore di C;

$$C = 180^\circ - (A + B);$$

Quindi la proporzione

$$\text{sen}\,A : \text{sen}\,C :: BC : AB$$

darà il valore del terzo lato AB; e sarà

$$AB = \frac{BC\ \text{sen}\,C}{\text{sen}\,A}.$$

TERZO CASO

58. Quando sono dati, come in questo caso, due lati AC, AB (fig. 32) e l'angolo compreso A, il principio di cui ci siamo valsi sinora non è sufficiente a trovare gli altri elementi del triangolo. Profitteremo pertanto della nota proposizione per cui

$$\overline{CB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 \pm 2\,AB.AD$$

ove il segno + s'intende che abbia luogo quando A è ottuso, ed il segno — quando A è acuto. Questa equazione potrebbe servire a determinare il lato CB, ove fosse noto il valore del segmento AD.

Pertanto se da A come centro e con un raggio a piacere AM si descrive l'arco MN, e si abbassa la perpendicolare MF sopra AB, dai due triangoli simili AMF, ACD avremo la proporzione

$$AM : AC :: AF : AD;$$

e di qui il valore di AD. Sembra però che in questo risultato sia incognita AF; ma se fatto centro in M, e con raggio uguale ad AM descriviamo un arco, e prolunghiamo MF sino all'incontro dell'arco medesimo in N', vedremo che AF è il seno dell'angolo AMF, del quale si può determinare facilmente il valore, osservando che esso è il complemento dell'angolo dato A. Così AF è il seno del complemento di A, o come si suol dire, il *coseno* di A, per cui scrivesi

$$AF = \text{sen}\,(90^\circ - A) = \cos A.$$

Il coseno d'un arco è il seno del suo complemento; oppure stando a ciò che dimostra la figura, esso è *la parte del raggio compresa tra il piede del seno, ed il centro.*

Il valore dei coseni è dato dalle tavole dei seni; se vorremo per esempio il coseno dell'arco 25°, 32', cercheremo il seno di 90° — 25°, 32', o di 64°, 28' che n'è il complemento; ma il modo con cui sono disposti i seni nelle tavole in uso, ci esime eziandio dal fare questa sottrazione.

Pertanto il valore di AD tratto dalla proporzione suddetta sarà

$$AD = \frac{AC \cos A}{AM}:$$

e per conseguenza

$$\overline{CB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 \pm \frac{2AB.AC \cos A}{AM}$$

il raggio AM, nel supposto che sia uguale al raggio secondo cui sono state costruite le tavole dei seni, potrà farsi $= 1$. Allora si trova $AD = AC \cos A$, e quindi

$$\overline{CB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 \pm 2AB.AC \cos A.$$

Determinato CB, il valore dell' angolo si deduce dalla proporzione

$$BC : AC = \text{sen}\, A : \text{sen}\, B.$$

dalla quale resulta

$$\text{sen}\, B = \frac{AC\, \text{sen}\, A}{BC}.$$

Finalmente avremo

$$C = 180^\circ - (A + B)$$

QUARTO CASO

59. Essendo dati i tre lati, l' equazione suddetta sommistra il valore degli angoli. Infatti

$$\pm \cos A = \frac{\overline{CB}^2 - \overline{AC}^2 - \overline{BA}^2}{2AC.BA}$$

fatto il calcolo, se il risultato sarà positivo, l'angolo A sarà ottuso, e sarà acuto quando l' angolo A sarà negativo.

Per trovare l'angolo B si osservi che essendo in virtù dello stesso principio

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \pm 2AB.BC.\cos B$$

avremo

$$\pm \cos B = \frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{2AB.BC}.$$

Quindi

$$C = 180^\circ - (A + B).$$

CAPITOLO II.

Principj relativi ai triangoli rettangoli.
Origine delle tangenti.

60. Di varie modificazioni è suscettibile la teoria precedente, quando il triangolo da risolversi è rettangolo; primieramente è manifesto che a risolvere un triangolo rettangolo bastano due soli elementi, cioè un lato, ed un angolo, oppure due lati; infatti l'angolo retto è un terzo elemento compreso implicitamente fra i dati. Sia A l'angolo retto (fig. 33); sarà $\operatorname{sen} A = R$ (56), e la dimostrata proporzionalità dei lati coi seni degli angoli opposti darà

$$AC : \operatorname{sen} B = AB : \operatorname{sen} C = CB : R;$$

ed infatti, se da B come centro descrivesi l'arco MN, e si abbassa la perpendicolare MP, la quale è il seno dell'angolo B, il confronto de' triangoli simili ABC, PMB condurrà al medesimo risultato; dunque in un triangolo rettangolo un lato sta al seno dell'angolo opposto come l'ipotenusa sta al raggio.

61. Osservando che gli angoli acuti B e C sono l'uno complemento dell'altro, avremo (58)

$$\operatorname{sen} B = \cos C, \quad \operatorname{sen} C = \cos B$$

donde ricaveremo le formule

$$R.AC = CB \operatorname{sen} B = CB \cos C$$
$$R.AB = CB \operatorname{sen} C = CB \cos B$$

ovvero, facendo $R = 1$,

$$AC = CB \operatorname{sen} B = CB \cos C$$
$$AB = CB \operatorname{sen} C = CB \cos B$$

donde apparisce che *in un triangolo rettangolo un lato è uguale all' ipotenusa moltiplicata pel seno dell' angolo opposto, o pel coseno dell' angolo compreso.*

Questo principio basterà a risolvere quel caso in cui è dato un lato e un angolo. Si osservi che l' angolo acuto incognito trovasi con sottrarre da un retto l'angolo acuto cognito. Quando sono dati due lati, l' altro principio

$$\overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

il quale è una ben nota proprietà dei triangoli rettangoli, servirà a determinare il terzo lato. Quindi pel principio precedente troveremo il valore degli angoli.

62. Quando l' ipotenusa sarà fra i due lati dati, si potranno, mediante il primo principio, determinare gli angoli indipendentemente dal terzo lato; ma pel caso in cui non fosse data l' ipotenusa, giova osservare che eliminando CB dalle due equazioni

$$R.AC = CB \operatorname{sen} B$$
$$R.AB = CB \cos B$$

si trova l' altra

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\operatorname{sen} B}{\cos B} \ldots . (M)$$

E quindi, conducendo la tangente NT, si ha

$$\frac{MP}{PB} = \frac{NT}{NB}, \text{ ovvero } \frac{\operatorname{sen} B}{\cos B} = \frac{NT}{R}$$

cioè, fatto $R = 1$,

$$\frac{\text{sen B}}{\cos B} = NT;$$

donde risulta che il rapporto del seno d'un arco al suo coseno è indicato dalla retta NT, che chiamasi *tangente trigonometrica* del medesimo arco. Dall'ispezione della figura si vedrà che *la tangente trigonometrica d'un arco è la tangente geometrica condotta all'estremità dell'arco medesimo, e prolungata sino all'incontro del raggio che passa per l'altra estremità.*

La grandezza di questa retta è indicata dalla seguente formula

$$\frac{\text{tang B}}{R} = \frac{\text{sen B}}{\cos B} \ldots . \text{(N)}$$

Così dai valori numerici dei seni degli archi sono stati dedotti quelli delle loro tangenti; e questi pure si trovano nelle tavole allato degli stessi seni. Le tangenti semplicizzano mirabilmente la risoluzione generale dei triangoli: intanto giova osservare che dalle equazioni (M) (N) risulta

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\text{tang B}}{R}$$

donde segue che *in un triangolo rettangolo qualunque i lati dell'angolo retto stanno fra loro come la tangente dell'angolo opposto al primo sta al raggio.* E poichè questa proporzione dà pur luogo all'equazione

$$R . AC = AB \text{ tang B},$$

ovvero, fatto $R = 1$,

$$AC = AB \text{ tang B},$$

potremo stabilire che *in un triangolo rettangolo un lato è*

uguale al prodotto della tangente dell' angolo opposto per l' altro lato.

In conseguenza di ciò conoscendo i due lati dell' angolo retto, sarà facile determinare gli angoli indipendentemente dall' ipotenusa.

CAPITOLO III.

Dei rapporti esistenti tra le rette trigonometriche d' un arco.

63. Sia B (fig. 34) un angolo retto, ed NN′ sia l'arco che lo misura. Questo arco sarà la quarta parte della circonferenza: talmentechè, fissato il punto M a piacere, avremo i due archi MN, MN′ uno de' quali sarà il complemento dell' altro. Pongasi $MN = a$; $MN' = 90° - a$. Abbassando da M una perpendicolare MP sul raggio BN, avremo $MP = \text{sen}\, a$, $BP = \cos a$. Inalzando sopra il raggio BM la perpendicolare MT, e prolungando il raggio BN sino all' incontro della perpendicolare medesima in T, avremo $MT = \text{tang}\, a$. Ora il raggio BN, che prolungato determina la tangente dell'arco MN, chiamasi *secante* dello stesso arco; lo che indicasi in questo modo $BT = \sec a$.

Abbassando la perpendicolare MP′ sul raggio BN′, e prolungando la tangente MT, ed il raggio stesso BN′ sino al loro incontro in T′, le rette MP′, MT′, BT′ saranno respettivamente il seno, la tangente e la secante dell' arco MN′ complemento di MN; perciò esse rette han nome di *coseno*, *cotangente*, *cosecante* del medesimo arco MN, e s' indicano così: $MP' = BP = \cos a$, $MT' = \cot a$, $BT' = \text{cosec}\, a$.

Pertanto si vede che sei sono le rette, le quali vengono introdotte nei calcoli per soddisfare all'oggetto della trigonometria; esse si chiamano *rette trigonometriche;* ed i rapporti loro si ricavano dai triangoli MBP, MBT, MBP′, MBT′ costituiti dalle rette stesse, i quali sono rettangoli e simili. I due MBP, MBT in quantochè sono rettangoli danno

$$\overline{MB}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{BP}^2,$$

$$\overline{BT}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{MT}^2,$$

e come simili danno pure

$$\frac{BT}{BM} = \frac{MT}{MP} = \frac{BM}{BP},$$

cosicchè sarà

$$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = R^2$$

$$\text{tang}^2 a + R^2 = \sec^2 a$$

$$\frac{\sec a}{R} = \frac{\text{tang}\, a}{\text{sen}\, a}, \quad \frac{\sec a}{R} = \frac{R}{\cos a}, \quad \frac{\text{tang}\, a}{\text{sen}\, a} = \frac{R}{\cos a}.$$

Gli altri due triangoli MBP′, MBT′ danno parimente

$$\overline{MB}^2 = \overline{MP'}^2 + \overline{BP'}^2,$$

$$\overline{BT'}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{MT'}^2$$

$$\frac{BT'}{BM} = \frac{MT'}{MP'} = \frac{BM}{BP'}$$

dunque sarà

$$\cos^2 a + \text{sen}^2 a = R^2$$

$$\cot^2 a + R^2 = \text{cosec}^2 a$$

$$\frac{\text{cosec}\, a}{R} = \frac{\cot a}{\cos a}, \quad \frac{\text{cosec}\, a}{R} = \frac{R}{\text{sen}\, a}, \quad \frac{\cot a}{\cos a} = \frac{R}{\text{sen}\, a};$$

le quali equazioni si potevano ben anche ricavare dalle altre

cinque precedenti, cambiando sen. in cos., tang. in cot., sec. in cosec.

64. Ma le dieci formule così determinate non ne formano propriamente che cinque; infatti ad esprimere che i due triangoli MBP, MBT sono rettangoli e simili bastano tre delle cinque prime equazioni, e tre delle altre cinque basterebbero ad esprimere che i triangoli MBP', MBT' sono parimente rettangoli e simili; di più la sesta equazione essendo identica con la prima, nulla aggiunge alle condizioni espresse dalle altre cinque: ciò potremmo d' altra parte comprovare col calcolo, deducendo le cinque equazioni che ne piacerà escludere da quelle che ne piace ritenere, e che noi poniamo qui appresso.

$$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = R^2 \qquad (\text{I})$$

$$\text{tang}\, a = \frac{R \,\text{sen}\, a}{\cos a} \qquad (\text{II})$$

$$\sec a = \frac{R^2}{\cos a} \qquad (\text{III})$$

$$\cot a = \frac{R \cos a}{\text{sen}\, a} \qquad (\text{IV})$$

$$\text{cosec}\, a = \frac{R^2}{\text{sen}\, a} \qquad (\text{V})$$

ovvero, quando facciasi R = 1,

$$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \qquad (\text{I})$$

$$\text{tang}\, a = \frac{\text{sen}\, a}{\cos a} \qquad (\text{II})$$

$$\sec a = \frac{1}{\cos a} \qquad (\text{III})$$

$$\cot a = \frac{\cos a}{\text{sen}\, a} \qquad (\text{IV})$$

$$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\operatorname{sen} a} \qquad (v)$$

Dalla (1) si può avere il valore del coseno per mezzo del seno

$$\cos a = \pm \sqrt{R^2 - \operatorname{sen}^2 a}$$

quindi le altre (II), (III), (IV), (V) possono somministrare la tangente, la secante, la cotangente, la cosecante d'un arco, quando si conosce il suo seno: dunque dal valore numerico del seno di un arco si può ricavare il valore numerico di tutte le altre linee trigonometriche dell'arco stesso.

Del resto, poichè cinque sono le equazioni nelle quali si contengono le sei rette trigonometriche, dal valore di una qualunque potremo, mediante l' eliminazione, dedurre il valore delle altre.

65. Or delle non poche formule a cui può dar luogo la combinazione delle precedenti, non riterremo che le quattro seguenti, come quelle che sogliono frequentemente abbisognare nei calcoli.

1.° Inalzando al quadrato i membri dell'equazione (II), e quindi aggiungendo ad ambedue il quadrato del raggio, avremo la formula

$$R^2 + \operatorname{tang}^2 a = \frac{R^4}{\cos^2 a},$$

ovvero (III)

$$R^2 + \operatorname{tang}^2 a = \sec^2 a$$

come dimostra la figura. Per cui si conclude che il quadrato del raggio più il quadrato della tangente è uguale al quadrato della secante. Facendo $R = 1$, sarà

$$1 + \operatorname{tang}^2 a = \sec^2 a \quad . \quad . \quad (VI)$$

2.° Dalla (III) ricavasi $\cos a = \frac{R^2}{\sec a}$; dunque (VI)

$$\cos a = \frac{R^2}{\sqrt{(R^2 + \tang^2 a)}}$$

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{(1 + \tang^2 a)}} \quad . \; . \; (\text{VII})$$

questa formula dà il coseno per la tangente.

3.° Dalla (II) si ha $\operatorname{sen} a = \frac{\tang a \cos a}{R}$; perciò (VII)

$$\operatorname{sen} a = \frac{R \tang a}{\sqrt{(R^2 + \tang^2 a)}}$$

$$\operatorname{sen} a = \frac{\tang a}{\sqrt{(1 + \tang^2 a)}} \quad . \; . \; (\text{VIII})$$

mediante la qual formula, dato il valore della tangente, si ottiene quello del seno.

4.° Moltiplicando i membri dell'equazione (II) pei membri dell'equazione (IV), avremo

$$\tang a \cot a = R^2$$

donde si vede che il raggio è medio proporzionale fra la tangente e la cotangente. Lo che pur si deduce dal triangolo rettangolo T B T′, dove la perpendicolare B M è media proporzionale tra i due segmenti T M, T′ M.

Facendo R = 1 si ha finalmente

$$\cot a = \frac{1}{\tang a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (\text{IX.})$$

CAPITOLO IV.

Dei valori correlativi delle quantità trigonometriche nelle diverse grandezze dell' arco.

66. La figura 20 si compone di una circonferenza divisa in quattro quadranti dai diametri perpendicolari NA, DC. Inoltre, posto l' origine degli archi in N, essa offre quattro archi NM, NDM', NDAM'', NDACM''' respettivamente compresi fra i limiti 0 e 90, 0 e 180, 0 e 270, 0 e 360, coi loro corrispondenti

seni	MP, M'P', M''P'', M'''P'''
coseni . . .	BP, B P', B P'', B P'''
tangenti . . .	MT, M'T', M''T'', M'''T'''
cotangenti . .	MS, M'S', M''S'', M'''S'''
secanti . . .	BT, B T', B T'', B T'''
cosecanti . . .	BS, B S', B S'', B S'''

Donde chiaramente si vede che ai quattro archi medesimi corrispondono quattro figure fra loro correlative, ciascuna delle quali può trasformarsi nelle altre, immaginando che il punto M convenientemente si muova sopra la circonferenza.

Pertanto la figura corrispondente al primo quadrante in cui l' arco NM è minore di 90° sia il sistema primitivo; e ad esso si riferiscano gli altri all' oggetto di determinare la correlazione che esiste fra le rette trigonometriche nelle varie grandezze dell' arco.

67. Immaginando che il punto M si muova verso D, cioè

supponendo che l'arco vada crescendo da o sino a 90°, il seno, la tangente e la secante andranno pure crescendo; il coseno, la cotagente e la cosecante andranno decrescendo.

Essendo M in D, MP coinciderà con DB, PB sarà nullo, MT risulterà parallela a BT, e non avrà altrimenti luogo il loro incontro, per cui le loro grandezze si dovranno reputare infinite; MS sarà nullo, e BS sarà uguale a BD.

Talmentechè sono da stabilirsi queste condizioni

$$\text{sen}\,90^\circ = R,\ \cos 90^\circ = 0,$$

$$\text{tang}\,90^\circ = \infty,\ \cot 90^\circ = 0,$$

$$\sec 90^\circ = \infty,\ \text{cosec}\,90^\circ = R$$

Or se quando M è in D, la tangente e la secante passano per l'infinito, il coseno e la cotangente passano per lo zero, v'ha ragione di credere che queste quantità prendano nel secondo quadrante un valore inverso. Ora

$$\cos NM = NB - NP,\ \cos NM' = NP' - NB$$

$$\text{tang}\,NM = \frac{R\,\text{sen}\,NM}{\cos NM},\ \sec NM = \frac{R^2}{\cos NM}$$

$$\cot NM = \frac{R\cos NM}{\text{sen}\,NM},\ \text{cosec}\,NM = \frac{R^2}{\text{sen}\,NM}$$

dunque (29, 30) il coseno, la tangente, la secante, e la cotangente prendono nel secondo quadrante de'valori inversi.

È manifesto che crescendo l'arco da 90° a 180°, il seno, la tangente e la secante decrescono, mentre il coseno, la cotangente e la cosecante crescono; essendo M' in A, M'P' ed M'T' saranno nulle; BP', e BT' saranno uguali a BA; M'S' e BS' risulteranno parallele e però infinite; per lo che avremo

$$\text{sen}\,180^\circ = 0,\ \cos 180^\circ = -R,$$

$$\text{tang}\,180^\circ = 0,\ \cot 180^\circ = -\infty$$

$$\sec 180^\circ = -R,\ \text{cosec}\,180^\circ = \infty$$

Frattanto essendo

$$\text{sen}\,NM = BD - DQ,\ \text{sen}\,NAM'' = DQ'' - BD$$

$$\cos NM = NB - NP,\ \cos NAM'' = NP'' - NB$$

i valori che prendono nel terzo quadrante il seno, il coseno, la secante, la cosecante saranno inversi rispetto a quelli che hanno nel primo.

Crescendo poi l'arco da 180° a 270°, andranno crescendo il seno, la tangente e la secante; ed invece il coseno, la cotangente, la cosecante andranno diminuendo; nel punto C, BP'' ed $M''S''$, saranno nulle, $M''P''$ e BS'' saranno uguali a BC, $M''T''$ e BT'' saranno infinite: ond'è che dovremo porre

$$\text{sen}\,270^\circ = -R,\ \cos 270^\circ = 0,$$

$$\text{tang}\,270^\circ = -\infty,\ \cot 270^\circ = 0,$$

$$\sec 270^\circ = -\infty,\ \text{cosec}\,270^\circ = -R,$$

Nel quarto quadrante poi essendo

$$\text{sen}\,NAM''' = DQ''' - DB$$

$$\cos NAM''' = NB - NP'''$$

avranno valore inverso il seno, e conseguentemente la tangente, la cotangente e la cosecante; qui pure si può osservare che al crescer dell'arco da 270° a 360° crescono il coseno, la cotangente e la cosecante, e decrescono il seno, la tangente, e la secante; in N, $M'''P'''$, $M'''T'''$ saranno nulle, BP''' e BT''' saranno uguali a BN, $M'''S'''$ e BS''' saranno infinite; donde segue che

$$\text{sen}\,360^\circ = 0,\ \cos 360^\circ = R,$$
$$\text{tang}\,360^\circ = 0,\ \cot 360^\circ = -\infty,$$
$$\sec 360^\circ = R,\ \text{cosec}\,360^\circ = -\infty$$

È manifesto pertanto che le rette trigonometriche riprendono successivamente nel secondo, terzo e quarto quadrante gli stessi valori che hanno nel primo: e che i quattro sistemi considerati non differiscono che per la correlazione delle quantità di cui sono costituiti.

68. Or dovremmo considerare gli archi maggiori di 360°, qual è per esempio l'arco NM M' M'' M''' M; ma è facile vedere che le rette trigonometriche di questo arco sono quelle medesime di NM; cosicchè per determinare i valori correlativi delle rette trigonometriche di un arco maggiore di quattro quadranti, dovremo da esso sottrarre la circonferenza tante volte quante si può, e determinare i valori correlativi del seno e del coseno dell'arco che resta, dai quali mediante le note formule agevolmente si deducono quelli delle altre rette trigonometriche.

In conseguenza di ciò, osservando che togliendo da quattro quadranti una circonferenza, il resto è zero, dovremo considerare l'arco o, siccome un arco avente le sue rette trigonometriche uguali a quelle dell'arco di 360°. Quindi sarà

$$\text{sen}\,o = 0 \qquad \cos o = R$$

$$\text{tang}\,o = \frac{R\,\text{sen}\,o}{\cos o} = 0 \qquad \cot o = \frac{R\cos o}{\text{sen}\,o} = \infty$$

$$\sec o = \frac{R^2}{\cos o} = R' \qquad \text{cosec}\,o = \frac{R^2}{\text{sen}\,o} = \infty$$

Ricavando i valori di cot o, e cosec o' dalle condizioni

precedenti $\cot 360^\circ = -\infty$, $\operatorname{cosec} 360^\circ = -\infty$, si trova $\cot o = -\infty$, $\operatorname{cosec} o = -\infty$; talmentechè sembra che le rette trigonometriche dell'arco di 360° non abbiano la stessa correlazione di quelle dell'arco o; ciò proviene dall'essere il punto N talmente posto su la figura da appartenere a un tempo al primo ed al quarto quadrante, cioè dall'essere N a un tempo origine degli archi che procedono da N verso D, e di quelli che procedono da N verso C; ma poichè questo punto da noi si considera come origine degli archi che crescono da N verso D, è naturale che si debbano coordinare i valori ipotetici delle sue rette trigonometriche a quelli che si avverano nel primo quadrante, e nelle formule da esso immediatamente dedotte.

I valori degli archi che procedono da N verso C sono inversi rispetto ai valori di quelli che crescono in senso contrario; infatti

$$NM = ND - MD,\ NM''' = M'''D - ND$$

talmentechè se gli archi NM, NM''' fossero uguali, indicando con a il primo, l'altro dovrebbe essere indicato con $-a$; e poichè le rette trigonometriche dell'arco NM''' sono identicamente uguali in situazione ed in grandezza a quelle dell'arco NMM'M''M''', perciò la correlazione delle rette trigonometriche dell'arco negativo $-a$ dovrà stabilirsi sopra quelle dell'arco NMM'M''M'''; quindi le rette trigonometriche dell'arco negativo che hanno valore inverso saranno il seno, la tangente, la cotagente, e la cosecante; per lo che stabiliremo queste condizioni

$$\begin{aligned} &\operatorname{sen} -a = -\operatorname{sen} a,\ \cos -a = +\cos a \\ &\operatorname{tang} -a = -\operatorname{tang} a,\ \cot -a = -\cot a \qquad (x) \\ &\sec -a = +\sec a,\ \operatorname{cosec} -a = -\operatorname{cosec} a \end{aligned}$$

69. Giova pertanto indicare alcune importanti conseguenze de' principj esposti.

Sia 2π una circonferenza qualunque, ed a un suo arco minore del quadrante; i valori correlativi delle rette trigonometriche di a sono per convenzione i seguenti

$$+\operatorname{sen} a \qquad +\cos a$$
$$+\operatorname{tang} a \qquad +\cos a$$
$$+\sec a \qquad +\operatorname{cosec} a$$

Adunque

1.° Poichè $\frac{1}{2}\pi - a$ è il complemento di a, sarà

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi - a\right) = +\cos a, \quad \cos\left(\frac{1}{2}\pi - a\right) = +\operatorname{sen} a$$
$$\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\pi - a\right) = +\cot a, \quad \cot\left(\frac{1}{2}\pi - a\right) = +\operatorname{tang} a \quad \text{(XI)}$$
$$\sec\left(\frac{1}{2}\pi - a\right) = +\operatorname{cosec} a, \quad \operatorname{cosec}\left(\frac{1}{2}\pi - a\right) = +\sec a$$

2.° Poichè un arco compreso fra 90° e 180° può indicarsi per $\frac{1}{2}\pi + a$, ed il suo supplemento per $\frac{1}{2}\pi - a$, avremo

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi + a\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi - a\right), \quad \cos\left(\frac{1}{2}\pi + a\right) = -\cos\left(\frac{1}{2}\pi - a\right)$$

quindi pei valori precedenti (XI) e per le formule (II), (III) (IV) e (V) sarà

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi + a\right) = +\cos a, \quad \cos\left(\frac{1}{2}\pi + a\right) = -\operatorname{sen} a$$
$$\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\pi + a\right) = -\cot a, \quad \cot\left(\frac{1}{2}\pi + a\right) = -\operatorname{tang} a \quad \text{(XII)}$$
$$\sec\left(\frac{1}{2}\pi + a\right) = -\operatorname{cosec} a, \quad \operatorname{cosec}\left(\frac{1}{2}\pi + a\right) = +\sec a$$

3.° Poichè un arco compreso fra i medesimi limiti di

90° e 180° può pure indicarsi per $\pi - a$, ed il suo supplemento per a, avremo ancora

$$\text{sen}\,(\pi - a) = +\,\text{sen}\,a \qquad \cos(\pi - a) = -\cos a$$
$$\text{tang}(\pi - a) = -\text{tang}\,a \qquad \cot(\pi - a) = -\cot a \qquad \text{(XIII)}$$
$$\sec(\pi - a) = -\sec a \qquad \text{cosec}(\pi - a) = +\text{cosec}\,a$$

4.° Poichè un arco compreso fra 180° e 270° è espresso da $\pi + a$, avremo

$$\text{sen}\,(\pi + a) = -\,\text{sen}\,a \qquad \cos(\pi + a) = -\cos a$$
$$\text{tang}(\pi + a) = +\,\text{tang}\,a \qquad \cot(\pi + a) = +\cot a \qquad \text{(XIV)}$$
$$\sec(\pi + a) = -\sec a \qquad \text{cosec}(\pi + a) = -\text{cosec}\,a$$

5.° Poichè l'arco compreso fra gli stessi limiti di 180° e 270° può ancora esprimersi con $\frac{3}{2}\pi - a$, riflettendo che $\frac{3}{2}\pi - a = \pi + (\frac{1}{2}\pi - a)$, sarà facile dedurre dalle precedenti (XIV), (XII) e (XI)

$$\text{sen}\,(\tfrac{3}{2}\pi - a) = -\,\text{sen}\,(\tfrac{1}{2}\pi = a) = -\cos a$$
$$\cos(\tfrac{3}{2}\pi - a) = -\cos(\tfrac{1}{2}\pi = a) = -\,\text{sen}\,a$$

e quindi per le (II), (III), (IV) e (V), avremo

$$\text{sen}\,(\tfrac{3}{2}\pi - a) = -\cos a \qquad \cos(\tfrac{3}{2}\pi - a) = -\,\text{sen}\,a$$
$$\text{tang}(\tfrac{3}{2}\pi - a) = +\cot a \qquad \cot(\tfrac{3}{2}\pi - a) = +\,\text{tang}\,a \qquad \text{(XV)}$$
$$\sec(\tfrac{3}{2}\pi - a) = -\text{cosec}\,a \qquad \text{cosec}(\tfrac{3}{2}\pi - a) = -\sec a$$

6.° Poichè un arco compreso fra 270° e 360° è espresso da $\frac{3}{2}\pi + a$, e $\frac{3}{2}\pi + a - 2\pi = (-\frac{1}{2}\pi - a)$, ponen-

do mente alle equazioni (x), avrèmo

$$\text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi+a\right)=\text{sen}-\left(\frac{1}{2}\pi-a\right)=-\text{sen}\left(\frac{1}{2}\pi-a\right)=-\cos a$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+a\right)=\cos-\left(\frac{1}{2}\pi-a\right)=+\cos\left(-\frac{1}{2}\pi-a\right)=+\text{sen}\,a$$

e ricorrendo alle anzidette formule (II), (III), (IV), (V), facilmente otterremo le seguenti

$$\text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi+a\right)=-\cos a \quad \cos\left(\frac{3}{2}\pi+a\right)=+\text{sen}\,a$$

$$\text{tang}\left(\frac{3}{2}\pi+a\right)=-\cot a \quad \cot\left(\frac{3}{2}\pi+a\right)=-\text{tang}\,a \quad \text{(XVI)}$$

$$\sec\left(\frac{3}{2}\pi+a\right)=+\text{cosec}\,a \quad \text{cosec}\left(\frac{3}{2}\pi+a\right)=-\text{cosec}\,a$$

7.° Poichè l'arco stesso compreso fra 270° e 360° può eziandio essere espresso da $2\pi-a$, avremo

$$\text{sen}\,(2\pi-a)=-\text{sen}\,a \quad \cos(2\pi-a)=+\cos a$$

$$\text{tang}(2\pi-a)=-\text{tang}\,a \quad \cot(2\pi-a)=-\cot a \quad \text{(XVII)}$$

$$\sec(2\pi-a)=+\sec a \quad \text{cosec}(2\pi-a)=-\text{cosec}\,a$$

8.° Finalmente

$$\text{sen}\,(2\pi+a)=+\text{sen}\,a \quad \cos(2\pi+a)=+\cos a$$

$$\text{tang}(2\pi+a)=+\text{tang}\,a \quad \cot(2\pi+a)=+\cot a \quad \text{(XVIII)}$$

$$\sec(2\pi+a)=+\sec a \quad \text{cosec}(2\pi+a)=+\text{cosec}\,a$$

CAPITOLO V.

De' varj archi che corrispondono ad una data retta trigonometrica.

70. Risulta dalle cose precedentemente esposte che esiste una infinità di archi, i quali hanno le medesime rette trigonometriche. Or supponendo che i valori delle sei rette trigonometriche (fig. 35)

$$\text{sen}\, x = \text{MB} = m, \qquad \cos x = \text{BD} = m',$$
$$\text{tang}\, x = \text{MT} = n, \qquad \cot x = \text{ML} = n',$$
$$\sec x = \text{DT} = p, \qquad \text{cosec}\, x = \text{DL} = p',$$

sieno dati, proponiamoci di trovare i differenti archi a cui essi corrispondono, cioè tutti i valori che possono competere ad x.

È manifesto che tutti gli archi i quali hanno la loro origine in A, ed il loro termine in M, N, P, Q sono altrettanti valori di x.

Questi archi si succedono con tale ordine che riesce facile esprimerli algebricamente; perocchè fatto $\text{AM} = a$, ed indicata con 2π la circonferenza il cui raggio è $\text{AD} = 1$, si vede che i quattro archi AM, AMN, ANP, APQ sono respettivamente espressi da a, $\pi - a$, $\pi + a$, $2\pi - a$; ed essi si possono considerare come i termini iniziali delle seguenti quattro serie di archi, le quali comprendono tutti quelli di cui è d'uopo favellare:

$$a, \quad 2\pi + a, \quad 4\pi + a, \text{ ec.} \qquad \text{(A)}$$
$$\pi - a, \quad 3\pi - a, \quad 5\pi - a, \text{ ec.} \qquad \text{(B)}$$

$$\pi + a, \quad 3\pi + a, \quad 5\pi + a, \text{ ec.} \qquad (C)$$
$$2\pi - a, \quad 4\pi - a, \quad 6\pi - a, \text{ ec.} \qquad (D)$$

71. Prendendo a considerare il seno, osserveremo in primo luogo che nel caso in cui il dato seno m sia positivo, gli archi (C) e (D), come quelli che terminano in P e Q, non possono esprimere valori di x capaci di soddisfare alla condizione $\operatorname{sen} x = m$, se non quando venga loro cambiato il segno; infatti è d'uopo cambiare il segno all'arco, allorchè vuolsi che il suo seno prenda segno contrario. Viceversa se m sarà negativo, converrà cambiare il segno agli archi (A) e (B). Laonde gli archi

$$a, \quad 2\pi + a, \quad 4\pi + a, \text{ ec.}$$
$$\pi - a, \quad 3\pi - a, \quad 5\pi - a, \text{ ec.}$$
$$-\pi - a, \quad -3\pi - a, \quad -5\pi - a, \text{ ec.}$$
$$-2\pi + a, \quad -4\pi + a, \quad -6\pi + a, \text{ ec.}$$

saranno tutti i valori di x che soddisfanno alla condizione $\operatorname{sen} x = m$; e gli archi

$$-a, \quad -2\pi - a, \quad -4\pi - a, \text{ ec.}$$
$$-\pi + a, \quad -3\pi + a, \quad -5\pi + a, \text{ ec.}$$
$$\pi + a, \quad 3\pi + a, \quad 5\pi + a, \text{ ec.}$$
$$2\pi - a, \quad 4\pi - a, \quad 6\pi - a, \text{ ec.}$$

saranno tutti i valori di x' che soddisfanno all'altra condizione $\operatorname{sen} x' = -m$. Indicando con k un intero qualunque positivo, o negativo, potremo comprendere tutti i valori di x in queste espressioni

$$x = 2k\pi + a, = (2k + 1)\pi - a$$

e tutti i valori di x' in quest' altre

$$x' = 2k\pi - a, = (2k+1)\pi + a;$$

per lo che potremo stabilire le seguenti formule

$$\begin{aligned} \text{sen}(2k\pi + a) &= \text{sen}[(2k+1)\pi - a] = \text{sen}a \\ \text{sen}(2k\pi - a) &= \text{sen}[(2k+1)\pi + a] = -\text{sen}a \end{aligned} \quad \text{(XIX)}$$

72. Passiamo al coseno. Gli archi (A) e (D) hanno i coseni loro positivi, e gli archi (B) e (C), come quelli che terminano in N e P, hanno i coseni negativi; perciò gli archi (A) e (D) soddisfanno alla condizione $\cos x = m'$, e gli archi (B) e (C) alla condizione $\cos x = -m'$. Ma riflettendo che il cambiamento di segno nell'arco non dà occasione ad alcun cambiamento di correlazione nel suo coseno, si scorge che cambiando i segni agli archi (A) e (D) si hanno altrettanti valori di x, per la condizione $\cos x = m'$, e cambiando i segni agli archi (B) e (C), altrettanti se ne ottengono per la condizione $\cos x' = -m'$. Laonde tutti i valori di x sono

$$\begin{array}{rrr} a, & 2\pi + a, & 4\pi + a, \text{ ec.} \\ 2\pi - a, & 4\pi - a, & 6\pi - a, \text{ ec.} \\ -a, & -2\pi - a, & -4\pi - a, \text{ ec.} \\ -2\pi + a, & -4\pi + a, & -6\pi + a, \text{ ec.} \end{array}$$

e più semplicemente si esprimono con le formule

$$x = 2k\pi + a, = 2k\pi - a$$

essendo k un intero qualunque positivo, o negativo. I valori poi di x' sono

$$\begin{array}{rrr} \pi - a, & 3\pi - a, & 5\pi - a, \text{ ec.} \\ \pi + a, & 3\pi + a, & 5\pi + a, \text{ ec.} \end{array}$$

$$-\pi+a, \quad -3\pi+a, \quad -5\pi+a, \text{ ec.}$$
$$-\pi-a, \quad -3\pi-a, \quad -5\pi-a, \text{ ec.}$$

i quali si possono tutti comprendere nelle espressioni

$$x' = (2k+1)\pi+a, = (2k+1)\pi-a$$

Frattanto sarà

$$\begin{aligned} \cos(2k\pi \pm a) &= \cos a \\ \cos[(2k+1)\pi \pm a] &= -\cos a \end{aligned} \qquad \text{(xx)}$$

73. Trattiamo della tangente. Gli archi (A) e (C) hanno le loro tangenti positive, e gli archi (B) e (D) hanno le tangenti negative: e poichè, se cambia il segno dell'arco, cambia pur il segno della sua tangente, segue che gli archi (A), (B), (C), (D) esprimeranno tutti i valori di x proprj della condizione $\tang x = n$, ove si prendano con segno contrario gli archi (B) e (D); e gli archi medesimi esprimeranno tutti i valori di x' per la condizione $\tang x' = -n$, quando si prendano con segno contrario gli archi (A) e (C).

Frattanto i valori di x saranno

$$\begin{array}{rrr} a, & 2\pi+a, & 4\pi+a, \text{ ec.} \\ -\pi+a, & -3\pi+a, & -5\pi+a, \text{ ec.} \\ \pi+a, & 3\pi+a, & 5\pi+a, \text{ ec.} \\ -2\pi+a, & -4\pi+a, & -6\pi+a, \text{ ec.} \end{array}$$

e potranno comprendersi nella espressione

$$x = k\pi+a$$

essendo k il solito intero qualunque positivo, o negativo. Ed i valori di x' saranno

$$\begin{array}{rrr} -a, & -2\pi-a, & -4\pi-a, \text{ ec.} \\ \pi-a, & 3\pi-a, & 5\pi-a, \text{ ec.} \end{array}$$

$$-\pi-a, \quad -3\pi-a, \quad -5\pi-a, \text{ ec.}$$

$$2\pi-a, \quad 4\pi-a, \quad 6\pi-a, \text{ ec.}$$

che si comprendono in

$$x' = k\pi - a$$

Per lo che si hanno le due formule

$$\begin{aligned} \tan g\,(k\pi + a) &= \tan g\, a \\ \tan g\,(k\pi - a) &= -\tan g\, a \end{aligned} \qquad \text{(XXI)}$$

74. Proseguendo quest'analisi, troveremo per l'equazioni

$$\cot x = n', \cot x' = -n'$$

i valori

$$x = k\pi + a, \; x' = k\pi - a$$

e di poi le formule

$$\begin{aligned} \cot\,(k\pi + a) &= \cot a \\ \cot\,(k\pi - a) &= -\cot a \end{aligned} \qquad \text{(XXII)}$$

75. Per le equazioni

$$\sec x = p, \; \sec x' = -p$$

troveremo

$$x = 2k\pi \pm a, \; x' = (2k+1)\pi \pm a$$

e quindi le formule

$$\begin{aligned} \sec\,(2k\pi \pm a) &= \sec a \\ \sec\,[(k+1)\pi \pm a] &= -\sec a \end{aligned} \qquad \text{(XXIII)}$$

76. Finalmente per le equazioni

$$\operatorname{cosec} x = p', \; \operatorname{cosec} x' = -p'$$

avremo

$$x = 2k\pi + a, = (2k+1)\pi - a$$

$$x' = 2k\pi - a, = (2k+1)\pi + a$$

$$\operatorname{cosec}(2k\pi + a) = \operatorname{cosec}[(2k+1)\pi - a] = \operatorname{cosec} a$$

$$\operatorname{cosec}(2k\pi - a) = \operatorname{cosec}[(2k+1)\pi + a] = -\operatorname{cosec} a \quad \text{(XXIV)}$$

È necessario aver presente che in tutte queste formule a è un arco minore del quadrante, e k un intero qualunque positivo, o negativo.

CAPITOLO VI.

Della moltiplicazione degli archi.

77. Non potrebbero gli esposti principj essere di alcuna utilità alla matematica pratica, quando non s'indicasse il modo di determinare i valori numerici delle rette trigonometriche. Or questi valori dipendono, come abbiamo già osservato, dal valore dei seni: diremo adunque come possa costruirsi la tavola dei seni, di cui abbiam fatto parola quando trattavamo della risoluzione dei triangoli (51).

78. È da osservarsi in primo luogo che il calcolo dei seni di tutti gli archi compresi nel quarto di circolo manifestamente si riduce a quello dei seni e coseni degli archi compresi tra o e 45°; perocchè i coseni degli archi minori della metà del quadrante non sono che i coseni de' loro complementi, e conseguentemente i seni degli archi maggiori di 45°.

79. Ciò posto, supponiamo che l'arco più piccolo di cui vuolsi il seno, ovvero quello dal quale dee incominciare la tavola sia b: supponiamo inoltre che gli archi susseguenti vadano crescendo della stessa quantità; talmentechè tal seguito di archi formi la progressione

$$b,\ b+b,\ 2b+b,\ 3b+b,\ \text{ec.};$$

cade in pensiero d' indagare il modo di mettere una subordinazione tra questi calcoli, cosicchè dal seno e coseno di b possano dedursi il seno e coseno di $b+b$, quindi il seno e coseno di $2b+b$, $3b+b$, ec. Laonde prenderemo a fare questa ricerca, la quale, come ben si scorge, riducesi alla risoluzione del problema, in cui essendo dati i seni ed i coseni di due archi a e b, vuolsi trovare il seno ed il coseno della loro somma. Infatti tal problema comprende in un solo caso tutte le particolarità della ricerca anzidetta.

Volendo istituire il ragionamento sopra una costruzione geometrica, sarà d' uopo supporre gli archi a e b, e la somma loro $a+b$ minore del quadrante, poichè le formule ottenute in questa speciale ipotesi, si possono estendere, per le stabilite convenzioni, a qualunque caso.

Perciò sia AD (fig. 36) il quadrante, $AM = a$, $MB = b$. Conducasi il raggio CM, e dal punto M si abbassi la perpendicolare MP sopra AC; avremo

$$MP = \text{sen}\, a,\ PC = \cos a$$

Dal punto B si abbassi la perpendicolare BE sopra MC, avremo pure

$$BE = \text{sen}\, b,\ EC = \cos b$$

Dallo stesso punto B si conduca la perpendicolare BF sopra AC, sarà

$$BF = \text{sen}\,(a+b),\ CF = \cos\,(a+b)$$

Queste ultime rette sono le incognite da determinarsi. Tirando EH ed EK, l' una perpendicolare, l' altra parallela ad AC, vedesi che

$$\text{sen}(a+b) = BF = BK + KF = BK + EH$$

$$\cos(a+b) = CF = CH - HF = CH - EK.$$

Ma i triangoli rettangoli EHC, EBK pel principio dimostrato al n.° 61 danno

$$BK = \frac{EB \cos EBK}{R} = \frac{\text{sen}\, b \cos a}{R}$$

$$EH = \frac{EC\, \text{sen}\, ECH}{R} = \frac{\text{sen}\, a \cos b}{R}$$

$$CH = \frac{EC \cos ECH}{R} = \frac{\cos a \cos b}{R}$$

$$EK = \frac{EB\, \text{sen}\, EBK}{R} = \frac{\text{sen}\, a\, \text{sen}\, b}{R}$$

Dunque

$$\text{sen}(a+b) = \frac{\text{sen}\, a \cos b + \text{sen}\, b \cos a}{R} \qquad \text{(XXV)}$$

$$\cos(a+b) = \frac{\cos a \cos b - \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b}{R} \qquad \text{(XXVI)}$$

ovvero, facendo $R = 1$,

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\, a \cos b + \text{sen}\, b \cos a \qquad \text{(XXV)}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b \qquad \text{(XXVI)}$$

per le quali formule resta risoluto il proposto problema.

80. Facendo $b = a$, risulterà

$$\text{sen}\, 2a = 2\,\text{sen}\, a \cos a \qquad \text{(XXVII)}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a \qquad \text{(XXVIII)}$$

formule che danno *il seno ed il coseno del doppio di un arco in funzione del seno e del coseno di questo arco*.

Per $b = 2a$, sarà

$$\text{sen}\, 3a = \text{sen}\, a \cos 2a + \text{sen}\, 2a \cos a,$$

$$\cos 3a = \cos a \cos 2a - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} 2a,$$

e sostituendo a $\operatorname{sen} 2a$, $\cos 2a$, i valori loro tratti dalle formule (XXVII) e (XXVIII), avremo

$$\operatorname{sen} 3a = 3 \operatorname{sen} a \cos^2 a - \operatorname{sen}^3 a \qquad \text{(XXIX)}$$

$$\cos 3a = \cos^3 a - 3 \cos a \operatorname{sen}^2 a \qquad \text{(XXX)}$$

le quali somministrano *il seno ed il coseno del triplo di un arco, in funzione del seno e del coseno dell'arco medesimo.*

Per $b = 3a$, avremo poi

$$\operatorname{sen} 4a = \operatorname{sen} a \cos 3a + \operatorname{sen} 3a \cos a$$

$$\cos 4a = \cos a \cos 3a - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} 3a$$

e quindi, sostituendo a $\operatorname{sen} 3a$ e $\cos 3a$ i valori loro desunti dalle formule precedenti, sarà

$$\operatorname{sen} 4a = 4 \operatorname{sen} a \cos^3 a - 4 \cos a \operatorname{sen}^3 a \qquad \text{(XXXI)}$$

$$\cos 4a = \cos^4 a - 6 \cos^2 a \operatorname{sen}^2 a + \operatorname{sen}^4 a \qquad \text{(XXXII)}$$

dalle quali si hanno *il seno ed il coseno del quadruplo di un arco in funzione del suo seno e del suo coseno.*

Pertanto è manifesto che progredendo nel calcolo, potremo ottenere il seno ed il coseno d'un multiplo qualunque d'un arco, mediante il seno ed il coseno dell'arco semplice.

81. Ma per la moltiplicazione degli archi vi sono altre formule le quali più rapidamente conducono al nostro intento: queste si determinano nel seguente modo.

Primieramente se nelle formule (XXV) e (XXVI) si sostituisce $a - b$ ad a, abbiamo

$$R \operatorname{sen} a = \operatorname{sen}(a - b) \cos b + \operatorname{sen} b \cos(a - b)$$

$$R \cos a = \cos(a - b) \cos b - \operatorname{sen} b \operatorname{sen}(a - b)$$

e quindi, mediante l'eliminazione di sen $(a-b)$, cos $(a-b)$, trovasi

$$\text{sen}\,(a-b) = \frac{\text{sen}\,a\,\cos b - \text{sen}\,b\,\cos a}{R} \quad \text{(XXXIII)}$$

$$\cos\,(a-b) = \frac{\cos a\,\cos b + \text{sen}\,b\,\text{sen}\,a}{R} \quad \text{(XXXIV)}$$

e facendo $R = 1$,

$$\text{sen}\,(a-b) = \text{sen}\,a\,\cos b - \text{sen}\,b\,\cos a \quad \text{(XXXIII)}$$

$$\cos\,(a-b) = \cos a\,\cos b + \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b \quad \text{(XXXIV)}$$

queste formule servono a determinare *il seno ed il coseno della differenza di due archi, allorquando è dato il loro seno, ed il loro coseno.*

Or sommando le due equazioni (XXV) e (XXXIII) membro a membro, si ha

$$\text{sen}\,(a+b) = 2\cos b\,\text{sen}\,a - \text{sen}\,(a-b)$$

e nella stessa maniera sommando le due equazioni (XXVI) e (XXXIV), si ha pure

$$\cos\,(a+b) = 2\cos b\,\cos a - \cos\,(a-b)$$

Da queste si possono facilmente dedurre le formule che soddisfanno all'oggetto nostro; imperocchè ponendo a in luogo di b, ed ma in luogo di a, immediatamente si ottiene

$$\text{sen}\,(m+1)a = 2\cos a\,\text{sen}\,ma - \text{sen}\,(m-1)a$$

$$\cos\,(m+1)a = 2\cos a\,\cos ma - \cos\,(m-1)a$$

È facil vedere che $(m-1)a$, ma, $(m+1)a$, sono archi i quali vanno crescendo della quantità a: adunque se a è l'arco con cui dee incominciare la tavola dei seni, e la quantità di cui questi successivamente si accrescono, col

soccorso di queste formule, tutto il seguito dei seni e dei coseni potrà calcolarsi senza difficoltà. La regola del calcolo è ben semplice, stantechè, come ben si scorge, il seno o il coseno d'uno degli archi a, $2a$, $3a$, ec. si ottiene sommando i due seni, o i due coseni che lo precedono, dopo averli respettivamente moltiplicati per $2\cos a$, e per -1. Infatti osservando che $\text{sen}\,0 = 0$, $\cos 0 = 1$, e facendo $m = 0, 1, 2, 3$, ec., abbiamo

$$\begin{aligned}
\text{sen}\,0 &= 0 \\
\text{sen}\,a &= \text{sen}\,a \\
\text{sen}\,2a &= 2\cos a\,\text{sen}\,a \\
\text{sen}\,3a &= 2\cos a\,\text{sen}\,2a - \text{sen}\,a \\
\text{sen}\,4a &= 2\cos a\,\text{sen}\,3a - \text{sen}\,2a \\
\text{sen}\,5a &= 2\cos a\,\text{sen}\,4a - \text{sen}\,3a \\
&\text{ec.} \\
\cos 0 &= 1 \\
\cos a &= \cos a \\
\cos 2a &= 2\cos a\cos a - 1 \\
\cos 3a &= 2\cos a\cos 2a - \cos a \\
\cos 4a &= 2\cos a\cos 3a - \cos 2a \\
\cos 5a &= 2\cos a\cos 4a - \cos 3a \\
&\text{ec.}
\end{aligned}$$

Or d'altro non si tratta che della esecuzione delle operazioni indicate.

CAPITOLO VII.

Della divisione degli archi.

82. Queste operazioni suppongono però che sia noto il seno ed il coseno dell'arco a, donde han principio le tavole: e poichè il coseno si deduce agevolmente dal seno, segue che nel calcolo delle tavole ogni difficoltà è rimossa, tranne la determinazione del seno dell'arco piccolissimo a. Di questa adunque conviene che si tenga proposito.

In primo luogo rifletteremo che se fosse noto un arco qualunque il cui seno potesse determinarsi senza difficoltà, e se una regola trigonometrica potessimo stabilire per la quale ci fosse dato dedurre da un tal seno il seno di una frazione qualunque dell'arco cui spetta, agevolmente potremmo pervenire alla cognizione del seno d'un piccolissimo arco.

83. Or le formule stesse relative alla moltiplicazione degli archi mostrano come dal seno, o coseno d'un dato arco, si possa dedurre il seno ed il coseno d'una frazione di esso arco: infatti sostituendo $\frac{1}{2}a$ ad a nelle formule (XXVII) e (XXVIII), si ottiene

$$2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}a = \operatorname{sen}a \qquad \text{(M)}$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}a - \operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}a = \cos a \qquad \text{(N)}$$

d'altra parte abbiamo

$$\cos^2\tfrac{1}{2}a + \operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}a = 1. \qquad \text{(P)}$$

Perciò se fosse dato $\cos a$, la risoluzione delle equazioni (N)

e (P) ne condurrebbe all' intento, poichè dalla loro somma e dalla sottrazione della (N) dalla (P) abbiamo

$$2\,\text{sen}^2\frac{1}{2}a = 1 - \cos a \qquad \text{(XXXV)}$$

$$2\cos^2\frac{1}{2}a = 1 + \cos a \qquad \text{(XXXVI)}$$

e quindi avremo

$$\text{sen}\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}},\quad \cos\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} \qquad \text{(Q)}$$

e poichè ad a possiamo sostituire $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{4}a$, ec., segue che col soccorso di queste formule, dal coseno d' un arco potremo sempre dedurre il seno ed il coseno d' una frazione di quell' arco piccola quanto vogliamo, purchè essa abbia per denominatore una potenza di 2.

É da osservare che il radicale deesi considerare come preceduto dal segno $\pm$; cosicchè per ciascuna delle incognite $\text{sen}\frac{1}{2}a$, $\cos\frac{1}{2}a$ si hanno due valori uguali e di segno contrario. La ragione di ciò è chiara; perocchè non essendo le dette formule funzioni di un arco, ma bensì di un coseno, esse debbono somministrare ad un tempo il seno ed il coseno della metà di tutti gli archi che hanno lo stesso coseno, i quali si comprendono nella formula (XX)

$$x = 2k\pi \pm a$$

Dunque tutti i valori di $\text{sen}\frac{1}{2}a$, $\cos\frac{1}{2}a$ saranno compresi in

$$\text{sen}\left(k\pi \pm \frac{1}{2}a\right),\quad \cos\left(k\pi \pm \frac{1}{2}a\right)$$

Se k fosse pari, $k\pi$ sarebbe un multiplo di 360°, e potremmo supprimerlo senza alterare il seno, nè il coseno:

laonde avremmo

$$\operatorname{sen}\left(\pm\frac{1}{2}a\right)=\pm\operatorname{sen}\frac{1}{2}a,\ \cos\left(\pm\frac{1}{2}a\right)=\cos\frac{1}{2}a$$

se k fosse dispari, potremmo sopprimere $k\pi$, ma sarebbe d' uopo cambiare i segni del seno e del coseno: per lo che avremmo

$$-\operatorname{sen}\left(\pm\frac{1}{2}a\right)=\mp\operatorname{sen}\frac{1}{2}a,\ -\cos\left(\pm\frac{1}{2}a\right)=-\cos\frac{1}{2}a$$

Pertanto è manifesto che due valori uguali e di segno contrario debbono aversi per $\operatorname{sen}\frac{1}{2}a$ e per $\cos\frac{1}{2}a$.

84. Se poi fosse dato $\operatorname{sen}a$ in luogo di $\cos a$, converrebbe sostituire nelle formule (Q) $\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}$ a $\cos a$; e poichè questo radicale è pure preceduto dal doppio segno $\pm$, si vede che si hanno quattro valori per ciascuna delle incognite $\operatorname{sen}\frac{1}{2}a$, $\cos\frac{1}{2}a$. A questi valori si può però dar forma più semplice facendo il seguente calcolo.

Sommando le due equazioni (M) e (P), trovasi

$$\cos\frac{1}{2}a+\operatorname{sen}\frac{1}{2}a=\sqrt{1+\operatorname{sen}a}$$

sottraendo dalla (P) la (M), trovasi

$$\cos\frac{1}{2}a-\operatorname{sen}\frac{1}{2}a=\sqrt{1-\operatorname{sen}a}$$

laonde per l' eliminazione, la quale riesce semplicissima, si ha

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}a=\frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}a}}{2}-\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}a}}{2}$$

$$\cos\frac{1}{2}a=\frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}a}}{2}+\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}a}}{2}\qquad\text{(R)}$$

Poichè ai radicali compete il segno $\pm$, è chiaro che ciascuna di queste espressioni offre quattro valori; e per dimostrare che ciò concorda colle convenzioni stabilite, osserveremo che le formule (R), come funzioni d'un seno, debbono somministrare il seno ed il coseno della metà di tutti gli archi che hanno il medesimo seno, i quali sono indicati dalle formule (XIX)

$$x = 2k\pi + a, = (2k+1)\pi - a.$$

Perciò tutti i valori di sen$\frac{1}{2}a$, e cos$\frac{1}{2}a$ saranno compresi nelle quattro espressioni

$$\text{sen}\,(k\pi + \tfrac{1}{2}a),\ \text{sen}[(k+\tfrac{1}{2})\pi - \tfrac{1}{2}a]$$

$$\cos\,(k\pi + \tfrac{1}{2}a),\ \cos[(k+\tfrac{1}{2})\pi - \tfrac{1}{2}a].$$

Sopprimendo $k\pi$ e conservando, o cambiando i segni del seno e del coseno, secondochè k è pari, o dispari, esse si muteranno nelle seguenti

$$\text{sen}\tfrac{1}{2}a = \pm\text{sen}\tfrac{1}{2}a,\ \text{sen}\tfrac{1}{2}a = \pm\,\text{sen}(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}a)$$

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \pm\cos\tfrac{1}{2}a,\ \cos\tfrac{1}{2}a = \pm\cos(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}a):$$

Ove si vede che i quattro valori del seno, come pure quei del coseno, sono uguali due a due e di segno contrario.

Se fosse $a = 90°$, sarebbe $\frac{1}{2}a = 45°$, $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}a = 45°$; e pertanto i quattro valori si ridurrebbero a due.

Altra osservazione è da farsi. Essendo l'arco $\frac{1}{2}a$ il complemento di $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}a$, è manifesto che le espressioni

precedenti possono esser cambiate in queste

$$\text{sen}\frac{1}{2}a = \pm\,\text{sen}\frac{1}{2}a \qquad \text{sen}\frac{1}{2}a = \pm\cos\frac{1}{2}a$$

$$\cos\frac{1}{2}a = \pm\cos\frac{1}{2}a \qquad \cos\frac{1}{2}a = \pm\,\text{sen}\frac{1}{2}a$$

le quali dimostrano che i valori di sen $\frac{1}{2}a$ sono uguali a quelli di $\cos\frac{1}{2}a$, come viene indicato dalla formula (R).

85. In questo luogo insorge però una difficoltà; perchè se quattro valori ognuna delle suddivisate formule somministra, è da sapersi quale di essi si debba prendere ne' varj casi che si possono presentare. Per esser brevi, non prenderemo a considerare che $\text{sen}\frac{1}{2}a$. Ci rammenteremo chè sono dati l'arco a, e sen$a$; e che i quattro valori di sen$\frac{1}{2}a$, possono essere scritti così

$$\text{sen}\frac{1}{2}a = \pm\left(\sqrt{1+\text{sen}\,a} - \sqrt{1-\text{sen}\,a}\right)$$

$$\text{sen}\frac{1}{2}a = \pm\left(\sqrt{1+\text{sen}\,a} + \sqrt{1-\text{sen}\,a}\right)$$

Evidentemente i primi due sono uguali e di segno contrario, lo stesso è dei secondi. Inoltre il quadrato de' primi due è $< \frac{1}{2}$; ed il quadrato degli altri è $> \frac{1}{2}$.

Ora essendo la corda dell'arco di 90°, ovvero il lato del quadrato che si può iscrivere nella circonferenza il cui raggio è uguale all'unità, indicato da $\sqrt{2}$, sarà

$$\text{sen}\,45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \text{ e } \text{sen}^2\,45 = \frac{1}{2}.$$

Perciò prescindendo dai segni, i due primi valori sono minori, gli altri maggiori di sen 45°.

D'altra parte quando un arco è dato, possiamo sempre determinare *a priori* il segno del suo seno, e vedere se questo seno debb' essere maggiore o minore di quello di 45°: dunque la scelta dell' opportuno valore di $\text{sen}\frac{1}{2}a$ non potrà riuscire difficile. Lo stesso ragionamento potrebbe ripetersi relativamente al coseno. Sia, per es., $a < 90°$: $\text{sen}\frac{1}{2}a$ dovrà esser positivo e minore di $\text{sen}\,45°$; $\cos\frac{1}{2}a$ dovrà esser positivo e maggiore di $\cos 45°$: dunque i valori opportuni saranno quelli che vengono indicati dalle formule (R).

86. Passiamo alla trisezione degli archi. Cambiando a in $\frac{1}{3}a$, le formule (XXIX) (XXX) si trasformano nella seguenti:

$$\text{sen}\,a = 3\text{sen}\frac{1}{3}a - 4\text{sen}^3\frac{1}{3}a$$

$$\cos a = 4\cos^3\frac{1}{3}a - 3\cos\frac{1}{3}a$$

Supponiamo che si debba determinare $\cos\frac{1}{3}a$ in funzione di $\cos a$: converrà risolvere la seconda equazione, la quale può pure esprimersi così;

$$\cos^3\frac{1}{3}a - \frac{3}{4}\cos\frac{1}{3}a - \frac{1}{4}\cos a = 0$$

Per non impegnarci nelle algebriche discussioni, ci contenteremo di mostrare *a priori* che le radici di questa equazione debbono esser reali.

L' incognita di questa equazione essendo un coseno, ed essendo tutti gli archi corrispondenti ad un dato coseno espressi da $2k\pi \pm a$ (XX), segue che le radici della e-

quazione medesima debbono necessariamente esser comprese nella espressione

$$\cos\frac{1}{3}(2k\pi \pm a)$$

Il numero intero k non può avere che una di queste tre forme $3n$, $3n+1$, $3n-1$; n essendo pure un numero intero; facciamo adunque succeesivamente

$$k=3n,\ k=3n+1,\ k=3n-1,$$

sopprimendo le circonferenze inutili, avremo

$$\cos(2n\pi \pm \frac{1}{3}a) = \cos(\pm\frac{1}{3}a) = \cos\frac{1}{3}a$$

$$\cos(2n\pi + \frac{2}{3}\pi \pm \frac{1}{3}a) = \cos(\frac{2}{3}\pi \pm \frac{1}{3}a)$$

$$\cos(-\frac{2}{3}\pi \pm \frac{1}{3}a) = \cos(\frac{2}{3}\pi \mp \frac{1}{3}a)$$

I due ultimi valori sono uguali ai due precedenti; perciò tre sono i valori essenzialmente diversi, cioè,

$$\cos\frac{1}{3}a,\ \cos(\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{3}a),\ \cos(\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{3}a).$$

Talvolta può però avvenire che due di essi sieno uguali; per esempio il primo risulta uguale al terzo, allorquando $a = 180^\circ$.

Altro non diremo intorno alla divisione degli archi; chè quanto abbiamo esposto basta a far conoscere l'andamento del raziocinio in questo genere di ricerche.

CAPITOLO VIII.

Calcolo della tavola dei seni.

87. Supponiamo che il minimo arco della tavola debba essere 1'': questo sarà il valore dell' arco a del quale abbiamo tenuto proposito ne' due precedenti capitoli; e la serie degli archi di cui si vogliono i seni sarà 1'', 2'', 3'', 4'', ec. Tre sono gli archi dei quali è nota la corda; la corda della quarta parte della circonferenza è uguale a $\sqrt{2}$, la di lei sesta parte ha per corda il raggio, cioè l'unità; finalmente la decima ha per corda la parte maggiore del raggio diviso in media ed estrema ragione, cioè $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Cosicchè essendo il seno di un arco uguale alla metà della corda dell' arco doppio, segue che nella circonferenza sono tre archi dei quali è cognito il seno; la metà del quadrante il cui seno sarà espresso da $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; il terzo del quadrante il cui seno potrà esprimersi per $\frac{1}{2}$; ed il quinto del quadrante stesso il cui seno sarà espresso da $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Indicando per q il quadrante, avremo adunque

$$\text{sen}\frac{q}{2} = \text{sen}\,45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad \text{(A)}$$

$$\text{sen}\frac{q}{3} = \text{sen}\,30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \text{(B)}$$

$$\text{sen}\frac{q}{5} = \text{sen}\,18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \qquad \text{(C)}$$

88. Frattanto dal dato (A) e mediante le formule (Q) potremo dedurre il valore del seno, e del coseno di qua-

lunque frazione di quadrante indicata da $\frac{q}{2^m}$, cioè tale che abbia per denominatore una potenza del 2; dal secondo dato (B), potremo avere il seno ed il coseno di qualunque frazione di quadrante indicata da $\frac{q}{3.2^m}$, che ha per denominatore una potestà di 2 moltiplicata per 3; finalmente dal terzo dato (C) potremo ricavare il valore del seno e del coseno di qualunque frazione indicata da $\frac{q}{5.2^m}$, la quale ha per denominatore una potenza di 2 moltiplicata per 5.

89. Se il quadrante fosse stato diviso in un numero di parti grande quanto vogliamo, purchè uguale ad una potenza di 2, potremmo agevolmente determinare il seno, ed il coseno di una di queste parti. Supponendo il quadrante diviso in $16384 = 2^{14}$, mediante quattordici operazioni, si ottiene $\text{sen}\,\frac{q}{16384} = 0{,}00095873799$. Ci varremo di questo dato in seguito.

Al medesimo intento si potrebbe pure pervenire con minore fatica supponendo il quadrante diviso in un numero di parti uguali, indicato da 3.2^n, ovvero da 5.2^n: dimanierachè se una di queste divisioni fosse stata adottata, la ricerca del seno dell'arco da cui dee aver principio la tavola non offrirebbe alcuna difficoltà.

90. Ma adottando la divisione sessagesimale della circonferenza, questo metodo per la determinazione del seno del più piccolo arco sarà insufficiente; infatti colla continua divisione per 2 non si può sempre cadere sopra un punto di divisione del quadrante; perchè essendo esso uguale ad

un numero di secondi indicato da $324000 = 90 \times 60 \times 60 = 2^5 . 3^4 . 5^3$, è manifesto che dopo cinque divisioni per 2 si ottiene un quoziente che non può essere ulteriormente diviso per metà. Perciò il seno dell'arco $= 1''$ non potrà dedursi dal dato (A). Lo stesso avviene partendo dai dati (B) e (C); perchè, sebbene nella divisione sessagesimale si possa esprimere in secondi il terzo ed il quinto del quadrante, nondimeno presto si cade nell'inconveniente medesimo.

91. Volendo determinare il seno dell'arco $= 1''$, bisogna muovere le considerazioni da altro principio; cioè da questo che quando si tratta di archi piccolissimi, il valore del seno si approssima tanto a quello dell'arco, che esprimendo in parti del raggio la grandezza di un piccolissimo arco, si può sostituire questa grandezza al suo seno.

Infatti sia NM (fig. 37) un arco piccolissimo descritto col raggio NB, MP ne sia il seno, PB il coseno e MT la tangente. Prolungando MP fino all'incontro dell'arco in M', e congiungendo T con M', poichè $MPM' < MNM'$, $MNM' < MTM'$, sarà $MT > NM$ ed $NM > MP$; donde si vede che la grandezza dell'arco è compresa fra quella della tangente e quella del seno. Or poichè

$$\frac{\cos a}{R} = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{tang} a}$$

riflettendo che all'impiccolire di a, il coseno di a si avvicina ad R, e che in conseguenza il rapporto $\frac{\cos a}{R}$ si approssima sempre più all'unità, concluderemo essere l'unità il limite del rapporto del seno alla tangente, e che per conseguenza la tangente, l'arco, ed il seno, a misura che impiccoliscono, tendono alla uguaglianza.

92. Dimanierachè, esprimendo in parti del raggio la tangente ed il seno di un piccolissimo arco, le prime cifre comuni ai due numeri daranno un valore approssimativo dell'arco, il quale è una quantità intermedia fra la tangente ed il seno. Or si osservi che

$$\text{tang}\, a = \frac{\text{sen}\, a}{\cos a} = \frac{\text{sen}\, a}{\sqrt{(1 - \text{sen}^2 a)}}$$

e poichè

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - \text{sen}^2 a)}} = (1 - \text{sen}^2 a)^{-\frac{1}{2}}$$

sviluppando secondo la formula del binomio, avremo

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - \text{sen}^2 a)}} = 1 + \frac{1}{2}\text{sen}^2 a + \frac{3}{8}\text{sen}^4 a + \text{ec.}$$

$$\text{tang}\, a = \text{sen}\, a + \frac{1}{2}\,\text{sen}^3 a + \frac{3}{8}\text{sen}^5 a + \text{ec.}$$

Ponendo $\text{sen}\, a = 0{,}0001$, si ha

$$\frac{1}{2}\text{sen}^3 a = 0{,}000\,000\,000\,000\,5$$

$$\text{tang}\, a = 0{,}000\,010\,000\,000\,5.$$

I termini susseguenti al secondo nella serie suddetta non possono cambiare queste prime tredici cifre decimali, donde segue che l'eccesso della tangente sopra il seno non si manifesta che alla tredicesima cifra. Dunque fino alla tredicesima cifra esclusivamente il numero indicherà il valore dell'arco il cui seno è uguale a 0,0001; frattanto l'arco risulterà espresso in parti del raggio con sufficiente approssimazione.

A più forte ragione tutti gli archi minori dell'arco suddetto espressi in parti del raggio non differiranno dai loro seni nelle prime dodici cifre decimali; e siccome l'arco

$\frac{q}{16384}$, di cui abbiamo calcolato il seno con dodici cifre decimali (89), è minore dell'arco il cui seno è 0,0001, e l'arco $= 1'' = \frac{q}{324000}$ è minore di $\frac{q}{16384}$, perciò certi di non commettere errore nelle prime dodici cifre decimali potremo porre sen $\frac{q}{16384} = \frac{1}{16384}$, sen $\frac{q}{324000} = \frac{1}{324000}$, ed istituire la proporzione;

$$\text{sen}\,\frac{q}{16384} : \text{sen}\,\frac{q}{324000} :: \frac{1}{16384} : \frac{1}{324000}$$

dalla quale si ricava che

$$\text{sen}\,\frac{q}{324000} = \frac{0{,}000095873799 \times 16384}{324000}$$

ovvero sen $1'' = 0{,}000\,000\,000\,484\,8$

93. Trovato il seno dell'arco donde ha principio la tavola, per continuarne la formazione ricorreremo alle cose esposte ne'capitoli precedenti. Ma anzichè determinare sen $2''$, sen $3''$, sen $4''$, ec. col mezzo delle formule già stabilite, potremo prendere il doppio, il triplo, ec. di sen $1''$; avendo cura però di calcolare nel tempo stesso anche le tangenti degli archi medesimi, per vedere sino a che punto ne sarà concesso di seguitar questa via: è manifesto che dovremo ricorrere alle formule stabilite, tostochè i valori del seno e della tangente non avranno più le prime dodici cifre comuni. Conosciuti i seni degli archi ed i coseni, agevolmente si trovano i valori di tutte le altre rette trigonometriche che si vogliono introdurre nelle tavole.

94. Avvertiremo che i seni espressi in parti del raggio si chiamano *seni naturali*. Or nelle tavole in uso non si

trovano ordinariamente i seni naturali, ma i loro logaritmi, i quali in virtù delle proprietà di cui godono servono a semplicizzare i calcoli, e sono di grande utilità nella pratica della trigonometria. Si osservi che il raggio è il massimo seno; e poichè col metodo esposto precedentemente si ottengono i seni naturali prendendo il raggio per unità; conseguentemente i numeri esprimenti i seni naturali, debbono risultare tutti minori dell'unità, cioè fratti. Il più piccolo di questi numeri è manifestamente il valore del seno del più piccolo arco, che noi abbiamo supposto essere $= 1''$; abbiamo trovato sen $1'' = 0,000\,000\,000\,484\,8$. Ora siccome il logaritmo di una frazione è negativo, segue che i logaritmi dei seni nell'ipotesi del raggio $= 1$ risultano tutti negativi.

95. A tale inconveniente si può però ovviare moltiplicando il raggio per un numero sufficientemente grande, affinchè anche il più piccolo seno risulti espresso per un numero maggiore dell'unità. Essendo n il numero per cui si moltiplica il raggio, tutte le rette trigonometriche si dovranno moltiplicare per n.

Infatti siano MP, MT, AT (fig. 38) il seno, la tangente, la secante dell'arco a nell'ipotesi di $R = 1$; M′P′, M′T′, AT′ sieno respettivamente le stesse rette nell'ipotesi di $R = n$; facilmente si vede che

$$\text{sen}a : \text{sen}'a = 1 : n$$

$$\text{tang}a : \text{tang}'a = 1 : n$$

$$\sec a : \sec' a = 1 : n$$

donde si ricava

$$\text{sen}'a = n\,\text{sen}a$$

$$\text{tang}'a = n\,\text{tang}a$$

$$\sec' a = n \sec a$$

E poichè il minimo seno non può esser reso maggiore dell'unità che col far avanzare la virgola almeno di dieci cifre, lo che equivale a moltiplicarlo per la decima potenza di 10, si vede che tutti i seni naturali risulteranno maggiori dell'unità, ove si moltiplichi il raggio per un numero non minore di 10^{10}.

96. Questo numero la cui determinazione da tal limite in poi è arbitraria, è stato scelto e fissato in modo che potesse contribuire a facilitare i calcoli, e perciò gli è stato attribuito il detto valore: cosicchè $n = 10^{10}$. Essendo

$$\log. 10^{10} = 10,$$

risulta che

$$\log. \text{sen}'a = 10 + \log. \text{sen}a$$

ovvero

$$\log. \text{sen}'a = 10 - \log. \text{sen}a$$

poichè, come abbiamo avvertito, log. sen$a$ è negativo. Di qui segue che in virtù dell'ipotesi di $n = 10^{10}$, *i logaritmi in uso sono i complementi aritmetici dei logaritmi calcolati nell'ipotesi del raggio* $= 1$. Dalla qual cosa non pochi vantaggi derivano per la pratica della trigonometria.

97. Trovati i logaritmi dei seni e dei coseni degli archi sino alla metà del quadrante, i logaritmi delle tangenti si deducono immediatamente dall'equazione $\frac{\text{tang}\, a}{R} = \frac{\text{sen}\, a}{\cos a}$ dalla quale risulta che

$$\log. \text{tang}a = \log. R + \log. \text{sen}\, a - \log. \cos a$$

$$\log. \text{tang}a = \log. \text{sen}\, a + (10 - \log. \cos a).$$

Adunque ad avere il logaritmo della tangente bisogna aggiungere al logaritmo del seno il complemento aritmetico del logaritmo del coseno.

98. Rispetto alle secanti rifletteremo che ordinariamente esse vengono eliminate dalle formule col sostituirvi il loro

valore in funzione del seno, o del coseno e della tangente; e per questa ragione non si pongono nella tavola i loro logaritmi. D'altronde quando ci abbisognasse fare uso di questi logaritmi nei calcoli, ci potremmo servire della formula $\sec a = \frac{R^2}{\cos a}$, la quale dimostra che

$$\log.\sec a = 10 + (10 - \log.\cos a)$$

cioè che ad avere il logaritmo della secante è d'uopo aggiungere dieci unità al complemento aritmetico del logaritmo del coseno.

99. Dalle formule

$$\cot a = \frac{R^2}{\tang a}, \quad \operatorname{cosec} a = \frac{R^2}{\operatorname{sen} a}$$

da cui ricavasi

$$\log.\cot a = 10 + (10 - \log.\tang a)$$
$$\log.\operatorname{cosec} a = 10 + (10 - \log.\operatorname{sen} a)$$

si deduce pure che il logaritmo della cotangente si può ottenere aggiungendo dieci unità al complemento aritmetico del logaritmo della tangente, e quello della cosecante aggiungendo dieci unità al complemento aritmetico del logaritmo del seno.

CAPITOLO IX.

Del modo di verificare la tavola dei seni.

100. Ad evitare gli errori che si possono commettere nella costruzione della tavola de' seni non v'ha altro mezzo che quello di assicurarsi dell'esattezza de' valori che successivamente si ottengono, calcolando di distanza in distanza i

seni col soccorso di altre formule, indipendenti da quelle che abbiamo indicate. Con tal mezzo potremo pure determinare il grado di precisione de' risultati medesimi, non essendo possibile, stante la dipendenza che esiste fra i calcoli che si fanno di seno in seno, che ogni valore risulti esattissimo sino all'ultima cifra decimale. Molti sono i metodi che si possono offrire a tal oggetto: ma noi ci contenteremo d'indicare le formule che agevolmente si possono determinare per il calcolo dei seni e dei coseni degli archi di 9° in 9°. Per le formule stabilite al n.° 87, abbiamo

$$\text{sen}45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{sen}18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})$$

Da quest'ultimo dato ricorrendo alla formula (1) (64) si deduce

$$\cos 18^\circ = \text{sen}72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

Sostituendo questi valori di sen 18° e cos 18° in luogo di sen a, e cos a nella formula (XXXIII) (80), avremo

$$\cos 36^\circ = \text{sen}\,54^\circ = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$$

e quindi per la formula (1) (64)

$$\text{sen}\,36^\circ = \cos 54^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

e sostituendo lo stesso valore di sen 18° a sen a nelle formule (R) (84), sarà

$$\text{sen}\,9^\circ = \cos 81^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}$$

$$\cos 9^\circ = \text{sen}\,81^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}$$

e finalmente sostituendo nelle formule medesime sen 54° a sen a, si trova

$$\text{sen}\,27^\circ = \cos 63^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}}$$

$$\cos 27^\circ = \text{sen}\,63^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

Riunendo questi risultamenti, avremo il seguente sistema di formule per la verificazione dei seni di nove in nove gradi.

$$\text{sen}\ 0^\circ = \cos 90^\circ = 0$$

$$\text{sen}\ 9^\circ = \cos 81^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}$$

$$\text{sen}\,18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})$$

$$\text{sen}\,27^\circ = \cos 63^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}}$$

$$\text{sen}\,36^\circ = \cos 54^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$\text{sen}\,45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

$$\text{sen}\,54^\circ = \cos 36^\circ = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$$

$$\text{sen}\,63^\circ = \cos 27^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}}$$

$$\text{sen}\,72^\circ = \cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$\text{sen}\,81^\circ = \cos\ 9^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}$$

$$\text{sen}\,90^\circ = \cos\ 0^\circ = 1$$

Queste espressioni non contenendo che dei radicali quadrati si possono calcolare facilmente: così avremo i loro valori con quel numero di decimali che vorremo.

CAPITOLO X.

Formule relative alle tangenti.

101. In primo luogo prenderemo a determinare le relazioni che esistono tra le tangenti di due archi e la tangente della loro somma, o della loro differenza. Per la formula (II), n.° 64 abbiamo manifestamente

$$\text{tang}\,(a+b)=\frac{\text{sen}\,(a+b)}{\cos\,(a+b)}$$

quindi per le formule (XXV), (XXVI) n.° 79

$$\text{tang}\,(a+b)=\frac{\text{sen}\,a\cos b+\text{sen}\,b\cos a}{\cos a\cos b-\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b}$$

e dividendo il numeratore ed il denominatore pel prodotto de' coseni di a e b, otterremo una funzione di sole tangenti, la quale sarà

$$\text{tang}\,(a+b)=\frac{\text{tang}\,a+\text{tang}\,b}{1-\text{tang}\,a\,\text{tang}\,b}\qquad\text{(XXXVII)}$$

questa formula servirà a determinare la tangente della somma di due archi, essendo date le tangenti degli archi medesimi.

Riflettendo poi che

$$\text{tang}\,(a-b)=\frac{\text{sen}\,(a-b)}{\cos\,(a-b)},$$

mediante le formule (XXXIII), (XXXIV) n.° 81, e con un calcolo analogo al precedente, avremo

$$\text{tang}\,(a-b)=\frac{\text{tang}\,a-\text{tang}\,b}{1+\text{tang}\,a\,\text{tang}\,b}\qquad\text{(XXXVIII)}$$

per mezzo della quale, essendo date le tangenti di due archi, potremo determinare la tangente della loro differenza.

102. Poichè a e b rappresentano archi qualunque, è manifesto che ad a e b si possono sostituire i loro complementi $90° - a$, $90° - b$, per lo che le tangenti di a e b si cambiano nelle cotangenti, e tang $(a+b)$, tang $(a-b)$ respettivamente si cambiano in tang $[180° - (a+b)]$, tang $-(a-b)$, ovvero in $-$ tang $(a+b)$, e $-$ tang $(a-b)$ (n.° 67 e 68). Laonde avremo le altre formule

$$\text{tang}\,(a+b) = \frac{\cot b + \cot a}{\cot a \cot b - 1}$$

$$\text{tang}\,(a-b) = \frac{\cot b - \cot a}{\cot a \cot b + 1}$$

le quali danno la tangente della somma e della differenza di due archi in funzione delle loro cotangenti.

103. Quindi ponendo mente alla formula (IX) (n.° 65), agevolmente si trova

$$\cot(a+b) = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot b + \cot a} \qquad \text{(XXXIX)}$$

$$\cot(a-b) = \frac{\cot a \cot b + 1}{\cot b - \cot a} \qquad \text{(XL)}$$

con le quali si trovano le cotangenti della somma e della differenza di due archi, essendo date le cotangenti degli archi stessi.

104. Or dallà formula (XXXVII) è facile ricavare altre interessanti formule per la moltiplicazione e divisione degli archi. Facciasi $b = a$; avremo per la duplicazione degli archi

$$\text{tang}\,2a = \frac{2\,\text{tang}\,a}{1 - \text{tang}^2 a} \qquad \text{(XLI)}$$

ovvero, dividendo il numeratore ed il denominatore per tang a,

$$\tang 2a = \frac{2}{\cot a - \tang a} \qquad (\text{XLII})$$

e poichè $\tang 2a = \frac{1}{\cot 2a}$, detta formula conduce eziandio alla seguente

$$\cot 2a = \frac{1}{2} \cot a - \frac{1}{2} \tang a \qquad (\text{XLIII})$$

Facciasi $b = 2a$, avremo per la triplicazione degli archi

$$\tang 3a = \frac{\tang a + \tang 2a}{1 - \tang a \tang 2a}$$

ovvero, sostituendo il valore di tang $2a$ dato dalla (XLI),

$$\tang 3a = \frac{3\tang a - \tang^3 a}{1 - 3\tang^2 a} \qquad (\text{XLIV})$$

105. La formula per la bisezione degli archi si ottiene con sostituire nella formula (XLI) $\frac{1}{2}a$ ad a; quella per la trisezione deducesi dalla (XLIV) ponendo $\frac{1}{3}a$ invece di a. La (XLI) dà

$$\frac{2\tang \frac{1}{2} a}{1 - \tang^2 \frac{1}{2} a} = \tang a$$

$$\tang^2 \frac{1}{2} a + \frac{2}{\tang a} \tang \frac{1}{2} a - 1 = 0 \qquad (\text{A})$$

e finalmente

$$\tang \frac{1}{2} a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tang^2 a}}{\tang a} \qquad (\text{XLV})$$

donde si vede che due sono i valori che competono alla tangente della metà d' un arco. Infatti essendo n.° 73, (XXI)

$$\text{tang}\, a = \text{tang}\,(2k\pi + a) = \text{tang}\,[\,(2k+1)\,\pi + a\,]$$

sarà evidentemente

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}a = \text{tang}\,(k\pi + \tfrac{1}{2}a) = \text{tang}\,(k\pi + \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}a)$$

Or se k fosse pari, avremmo

$$\text{tang}\,(k\pi + \tfrac{1}{2}a) = +\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}a$$

$$\text{tang}\,(k\pi + \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}a) = \text{tang}\,(\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}a) = -\cot\tfrac{1}{2}a$$

se k fosse dispari, avremmo

$$\text{tang}\,(k\pi + \tfrac{1}{2}a) = \text{tang}\,(\pi + \tfrac{1}{2}a) = +\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}a$$

$$\text{tang}\,(k\pi + \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}a) = \text{tang}\,(\tfrac{3}{2}\pi + \tfrac{1}{2}a) = -\cot\tfrac{1}{2}a$$

in ogni caso adunque i valori sono due, cioè

$$+\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}a, \quad -\cot\tfrac{1}{2}a$$

lo che d' altra parte concorda con la natura della equazione (A), ove il termine cognito è -1: poichè essendo

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}a \cot\tfrac{1}{2}a = 1$$

sarà ancora

$$+\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2} \times -\cot\tfrac{1}{2}a = -1 \qquad \text{(B)}$$

È manifesto che nel caso di $a < 90^\circ$, $\text{tang}\,\frac{1}{2}a$ debb' essere negativa; perciò la formula di cui ci dovremo valere in tal caso sarà la seguente

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}a = \frac{-1 + \sqrt{1 + \text{tang}^2 a}}{\text{tang}\, a}$$

ovvero, stante la condizione (B),

$$\cot \frac{1}{2} a = \frac{1 + \sqrt{1 + \tang^2 a}}{\tang a}$$

106. Ponendo mente alle formule (II) (64), e (VII) (65)

$$\tang a = \frac{\sen a}{\cos a} \quad \sqrt{1 + \tang^2 a} = \frac{1}{\cos a}$$

facilmente otterremo

$$\tang \frac{1}{2} a = \frac{1 - \cos a}{\sen a} \qquad \text{(XLVI)}$$

osservando inoltre che per la formula (VIII) (65) abbiamo

$$\frac{\sqrt{1 + \tang^2 a}}{\tang a} = \frac{1}{\sen a}$$

otterremo pure

$$\tang \frac{1}{2} a = \frac{\sen a}{1 + \cos a} \qquad \text{(XLVII)}$$

Quindi moltiplicando membro a membro le due equazioni (XLVI) e (XLVII), ed estraendo dipoi la radice quadrata dai membri della equazione risultante, sarà

$$\tang \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 - a \cos a}{1 + \cos a}} \qquad \text{(XLVIII)}$$

queste formule (XLVI), (XLVII), (XLVIII) facilmente si ricavano anche dalle formule (XXXV), (XXXVI) n.° 83.

CAPITOLO XI.

Altre relazioni esistenti tra le rette trigonometriche di due archi qualunque, e quelle della somma e della differenza degli archi stessi.

107. Le formule che abbiamo stabilite danno occasione

a molte altre formule; di queste faremo conoscere le principali.

Primieramente sommando due a due i membri delle equazioni (XXV, XXVI) n.° 79, e (XXXIII, XXXIV) n.° 81, è facile ottenere le quattro formule seguenti:

$$\text{sen}\,a\cos b = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,(a+b) + \frac{1}{2}\,\text{sen}\,(a-b) \qquad \text{(XLIX)}$$

$$\cos a\,\text{sen}\,b = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,(a+b) - \frac{1}{2}\,\text{sen}\,(a-b) \qquad \text{(L)}$$

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b) \qquad \text{(LI)}$$

$$\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b = \frac{1}{2}\cos(a-b) - \frac{1}{2}\cos(a+b) \qquad \text{(LII)}$$

Quindi dividendo i due membri della (LII) pei due membri della (LI), sarà

$$\text{tang}\,a\,\text{tang}\,b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)} \qquad \text{(LIII)}$$

dividendo la (XLIX) per la (L), sarà pure

$$\text{tang}\,a\cot b = \frac{\text{sen}\,(a+b) + \text{sen}\,(a-b)}{\text{sen}\,(a+b) - \text{sen}\,(a-b)} \qquad \text{(LIV)}$$

dividendo la (L) per la (XLIX)

$$\cot a\,\text{tang}\,b = \frac{\text{sen}\,(a+b) - \text{sen}\,(a-b)}{\text{sen}\,(a+b) + \text{sen}\,(a-b)} \qquad \text{(LV)}$$

dividendo la (LI) per la (LII)

$$\cot a\cot b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{\cos(a-b) - \cos(a+b)} \qquad \text{(LVI)}$$

108. Or ponendo $a+b=a'$, $a-b=b'$, ed in conseguenza $a=\frac{1}{2}(a'+b')$, $b=\frac{1}{2}(a'-b')$, e poscia eli-

minando gli apici, le formule (XLIX), (L), (LI), (LII) si cambiano nelle seguenti

$$\text{sen}a + \text{sen}b = 2\text{sen}\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b) \qquad (\text{LVII})$$

$$\text{sen}a - \text{sen}b = 2\cos\frac{1}{2}(a+b)\,\text{sen}\frac{1}{2}(a-b) \qquad (\text{LVIII})$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b) \qquad (\text{LIX})$$

$$\cos b - \cos a = 2\text{sen}\frac{1}{2}(a+b)\,\text{sen}\frac{1}{2}(a-b) \qquad (\text{LX})$$

Ora osservando che da $\text{tang}a = \frac{\text{sen}a}{\cos a}$, $\text{tang}b = \frac{\text{sen}b}{\cos b}$ si ha

$$\text{tang}a + \text{tang}b = \frac{\text{sen}a\cos b + \text{sen}b\cos a}{\cos a\cos b}$$

$$\text{tang}a - \text{tang}b = \frac{\text{sen}a\cos b - \text{sen}b\cos a}{\cos a\cos b}$$

ponendo mente alle formule (XXV) n.° 79, (XXXIII) n.° 81,

$$\text{tang}a + \text{tang}b = \frac{\text{sen}(a+b)}{\cos a\cos b} \qquad (\text{LXI})$$

$$\text{tang}a - \text{tang}b = \frac{\text{sen}(a-b)}{\cos a\cos b} \qquad (\text{LXII})$$

Partendo poi da $\cot a = \frac{\cos a}{\text{sen}a}$, $\cot b = \frac{\cos b}{\text{sen}b}$

col soccorso delle medesime formule, avremo nello stesso modo

$$\cot a + \cot b = \frac{\text{sen}(a+b)}{\text{sen}a\,\text{sen}b} \qquad (\text{LXIII})$$

$$\cot a - \cot b = \frac{\text{sen}(a-b)}{\text{sen}a\,\text{sen}b} \qquad (\text{LXIV})$$

109. Ora moltiplicando membro a membro le suddette formule (XXV), (XXXIII) avremo

$$\text{sen}\,(a+b)\,\text{sen}\,(a-b) = \text{sen}^2 a \cos^2 b - \text{sen}^2 b \cos^2 a$$

e poichè

$$\cos^2 b = 1 - \text{sen}^2 b,\ \cos^2 a = 1 - \text{sen}^2 a,$$

sarà ancora

$$\text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b = \text{sen}\,(a+b)\,\text{sen}\,(a-b) \quad \text{(LXV)}$$

Colle formule (XXVI), (XXXIV) avremo pure

$$\cos^2 a - \text{sen}^2 b = \cos\,(a+b)\cos\,(a-b) \quad \text{(LXVI)}$$

E moltiplicando membro a membro le formule (LXI), (LXII) e le formule (LXIII), (LXIV) troveremo nel medesimo modo

$$\text{tang}^2 a - \text{tang}^2 b = \frac{\text{sen}\,(a+b)\,\text{sen}\,(a-b)}{\cos^2 a \cos^2 b} \quad \text{(LXVII)}$$

$$\cot^2 a - \cot^2 b = \frac{\text{sen}\,(a+b)\,\text{sen}\,(a-b)}{\text{sen}^2 a\ \text{sen}^2 b} \quad \text{(LXVIII)}$$

110. È agevole poi dedurre colla divisione le seguenti dalle (LVII), (LVIII), (LIX), (LX):

$$\frac{\text{sen}a + \text{sen}b}{\text{sen}a - \text{sen}b} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(a+b)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(a-b)} \quad \text{(LXIX)}$$

$$\frac{\text{sen}a + \text{sen}b}{\cos a + \cos b} = \text{tang}\,\frac{1}{2}(a+b) \quad \text{(LXX)}$$

$$\frac{\text{sen}a + \text{sen}b}{\cos b - \cos a} = \cot\,\frac{1}{2}(a-b) \quad \text{(LXXI)}$$

$$\frac{\text{sen}a - \text{sen}b}{\cos a + \cos b} = \text{tang}\,\frac{1}{2}(a-b) \quad \text{(LXXII)}$$

$$\frac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b}{\cos b - \cos a} = \cot \frac{1}{2}(a+b) \qquad \text{(LXXIII)}$$

$$\frac{\cos a + \cos b}{\cos b - \cos a} = \frac{\cot \frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a+b)} \qquad \text{(LXXIV)}$$

Aggiungeremo pure la formula

$$\frac{\cos a + \cos b}{\cos b - \cos a} = \frac{\sec a + \sec b}{\sec a - \sec b} \qquad \text{(LXXV)}$$

la quale agevolmente si deduce dalle due equazioni

$$\cos a = \frac{1}{\sec a}, \ \cos b = \frac{1}{\sec b}.$$

CAPITOLO XII.

Dimostrazione geometrica di alcune formule.

111. Le formule che abbiamo determinate, come quelle che conseguono a principj legittimamente dimostrati, non hanno d'uopo d'alcuna verificazione. Pure v'ha un mezzo di verificazione per le formule ottenute col calcolo che rende la verità più sensibile, e per cui si acquista una chiara idea della composizione delle formule medesime. Questo mezzo consiste nella costruzione geometrica di esse formule, ed a noi piace mostrarne i seguenti esempj.

I.

Trovare il seno ed il coseno della differenza di due archi, essendo dato il seno ed il coseno degli archi medesimi.

Sia (fig. 39.) A M $= a$, M B $= b$; prolungando EB sino

all' incontro di A M in B', avremo MB' = MB; e conducendo le rette B'G, B'F' l' una paralella, l'altra perpendicolare ad A C, sarà

$$\text{sen}(a-b) = B'F' = EH - EG = EH - BK$$

$$\cos(a-b) = F'C = HC + F'H = HC + EK$$

quindi, ove si faccia R = 1,

$$\text{sen}(a-b) = \text{sen}a \cos b - \text{sen}b \cos a$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \text{sen}b \cos a$$

formule identiche con le (XXXIII), (XXXIV) n.° 81.

II.

Essendo dato il seno ed il coseno d' un arco, trovare il seno ed il coseno dell' arco doppio.

Sia B (fig. 40) il punto di mezzo dell' arco A C = 2 a; si conducano la corda A C, il raggio O B e le perpendicolari C Q e P H sopra A O; avremo

$$\text{sen}\, a = AP, \cos a = OP$$

$$\text{sen}\, 2a = CQ = 2PH$$

$$\cos 2a = OQ = OH - HQ = OH - AH$$

Il triangolo O P A dà

$$PH = \frac{AP \times OP}{OA}, \quad OH = \frac{\overline{OP}^2}{OA}, \quad AH = \frac{\overline{AP}^2}{OA}$$

perciò, quando sia R = 1, otterremo

$$\text{sen}\, 2a = 2\, \text{sen}a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$$

che sono le formule (XXVII), (XXVIII) trovate al n.° 80.

III.

Essendo dato il coseno d' un arco, trovare il seno ed il coseno della metà dell' arco medesimo.

Prendasi l' arco $AC = a$ (fig. 41); conducasi la perpendicolare CP sopra AB; quindi si tirino le corde AC, CB, come pure i raggi OD, OE da cui esse son divise perpendicolarmente nel mezzo. Nella supposizione di $AO = 1$, avremo

$$OP = \cos a,\ AP = 1 - \cos a,\ AC = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} a$$

$$BP = 1 + \cos a,\ BC = 2 \cos \frac{1}{2} a.$$

Laonde, riflettendo che la corda è media proporzionale fra il diametro ed il sègmento adiacente, sarà

$$\overline{AC}^2 = AB \times AP \qquad \overline{BC}^2 = AB \times BP$$

ovvero

$$4 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a = 2(1 - \cos a),\ 4 \cos^2 \frac{1}{2} a = 2(1 + \cos a)$$

donde si avranno le note formule (Q) n.° 83

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}},\ \cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$$

IV.

Essendo dati il seno ed il coseno di un arco, trovare il seno ed il coseno dell' arco triplo.

Sia (fig. 42) $OB = 1$, e l' arco $AB = BC = CD = a$. Il triangolo isoscele BOD è simile a BDF; poichè l' angolo OBD è comune, e l'angolo BDF il quale ha per misura la metà di BE o BD, è uguale a BOD. Abbiamo dunque

$$BF : BD :: BD : OB$$

donde si ricava

$$BF = 4 \operatorname{sen}^2 a$$

Conducendo PG parallela a BO, risulterà $PG = BF$, e quindi dai triangoli simili QGP, OBP ricaveremo

$$QG : BP = PG : OB$$

$$PQ : OP = PG : OB$$

donde si ottiene

$$QG = 4 \operatorname{sen}^3 a, \quad PQ = \operatorname{sen}^2 a \cos a .$$

Ora è facil vedere che

$$\operatorname{sen} 3a = DQ = DF + FG - QG$$

$$= BD + BP - QG = 3 \operatorname{sen} a - QG$$

$$\operatorname{Cos} 3a = OQ = OP - PQ = \cos a - PQ$$

per la sostituzione de' valori di QG e di PQ avremo

$$\operatorname{sen} 3a = 3 \operatorname{sen} a - 4 \operatorname{sen}^3 a$$

$$\cos 3a = \cos a - 4 \operatorname{sen}^2 a \cos a$$

è facile dimostrare che la prima di queste due espressioni è identica con la formula (XXIX); l'altra, ove pongasi $1 - \cos^2 a$ in luogo di $\operatorname{sen}^2 a$, diverrà

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

la quale è pure identica con la formula (XXX).

V.

Essendo date le tangenti di due archi, trovare la tangente della loro somma e quella della loro differenza.

Sieno (fig. 43) $OA = 1$, $AB = a$, $BC = b$; alle estre-

mità dei raggi OA ed OB si conducano le tangenti AT e BS; quindi si abbassi la perpendicolare SH sopra OA. I dati sono

$$BR = \text{tang}\, a, \quad BS = \text{tang}\, b$$

e la prima incognita è $AT = \text{tang}\,(a+b)$.

Dai triangoli simili OAT, OHS abbiamo

$$\frac{AT}{OA} = \frac{SH}{OH}, \text{ donde } \text{tang}\,(a+b) = \frac{SH}{OH}$$

Il valore di SH si ha dai triangoli simili SHR, OBR, i quali danno

$$\frac{SH}{SR} = \frac{OB}{OR}, \text{ ed } SH = \frac{\text{tang}\, a + \text{tang}\, b}{OR}$$

Il valore poi di OH si avrà dal triangolo OSR, da cui si ricava

$$\overline{SR}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{OS}^2 - 2\,OR \times OH$$

ma abbiamo ancora

$$\overline{SR}^2 = \overline{BR}^2 + \overline{BS}^2 + 2\,BR \times BS$$

perciò

$$\overline{BR}^2 + \overline{BS}^2 + 2\,BR \times BS = \overline{OR}^2 + \overline{OS}^2 - 2\,OR \times OH$$

donde si ricava

$$2\,OR \times OH = \overline{OR}^2 - \overline{BR}^2 + \overline{OS}^2 - \overline{BS}^2 - 2\,BR \times BS$$

$$2\,OR \times OH = 2\,\overline{OB}^2 - 2\,BR \times BS$$

$$2\,OR \times OH = 2 - 2\,\text{tang}\, a\, \text{tang}\, b$$

e quindi finalmente

$$OH = \frac{1 - \text{tang}\, a\, \text{tang}\, b}{OR}$$

Frattanto sostituendo ad SH ed OH i loro valori, troveremo la formula

$$\text{tang}\,(a+b) = \frac{\text{tang}\,a + \text{tang}\,b}{1 - \text{tang}\,a\,\text{tang}\,b}$$

identica con la formula (XXXVII)

Con ugual facilità si ottiene il valore di tang $(a-b)$; sia $AB=a$, $BC=b$ (fig. 44); conducasi il raggio OB, la tangente BR, il raggio OA che sarà d'uopo prolungare sino all'incontro della tangente medesima; la tangente AT, ed il raggio OC che converrà pur prolungare sino all'incontro di questa tangente; finalmente la perpendicolare SH sopra OA: avremo

$$BR = \text{tang}\,a,\quad BS = \text{tang}\,b,\quad AT = \text{tang}\,(a-b).$$

Dai triangoli simili OAT, OHS facilmente dedurremo

$$\text{tang}\,(a-b) = \frac{SH}{OH}.$$

Or poichè $SR = \text{tang}\,a - \text{tang}\,b$, i triangoli SHR, OBR daranno

$$SH = \frac{\text{tang}\,a - \text{tang}\,b}{OR};$$

e poichè

$$\overline{SR}^2 = \overline{BR}^2 + \overline{BS}^2 - 2\,BR \times BS$$

$$\overline{SR}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{OS}^2 - 2\,OR \times OH$$

uguagliando questi due valori di SR, e deducendo dall'equazione risultante il valore di OH, sarà

$$OH = \frac{1 + \text{tang}\,a\,\text{tang}\,b}{OR}$$

finalmente per la sostituzione dei valori di SH ed OH otterremo la formula

$$\tang(a-b)=\frac{\tang a-\tang b}{1+\tang a\tang b}$$

identica con la formula (XXXVIII)

VI.

Dimostrare geometricamente le formule (LVII), (LVIII)

$$\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} b=2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)$$

$$\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} b=2\cos\frac{1}{2}(a+b)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)$$

Sia (fig. 45) $AB=a$, $AC=b$; conducasi la corda BC, ed il raggio OD perpendicolare sopra CB; quindi si tirino le perpendicolari BP, EF, DR, CQ sopra AO, ed EG parallela ad AO. Avremo

$$BP=\operatorname{sen} a,\quad CQ=\operatorname{sen} b$$

$$EF=\frac{\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} b}{2},\ BG=\frac{\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} b}{2}$$

$$AD=\frac{1}{2}(a+b),\ DR=\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b),$$

$$OR=\cos\frac{1}{2}(a+b),\ BD=\frac{1}{2}(a-b),$$

$$BE=\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b),\ OE=\cos\frac{1}{2}(a-b),$$

Ma i triangoli simili OEF, BGE, ODR danno

$$EF:DR::OE:OD,\ BG:OR::BE:OD,$$

adunque

$$EF=\frac{DR\times OE}{OD},\ BG=\frac{OR\times BE}{OD}$$

Or facendo $OD = 1$, e le opportune sostituzioni, troveremo immediatamente le suindicate formule.

Dai medesimi triangoli si potrebbero anche ricavare le formule (LIX) (LX).

VII.

Dimostrare geometricamente che la somma dei seni di due archi stà alla loro differenza, come la tangente della semisomma de' due archi medesimi sta alla tangente della loro semidifferenza.

Dopo aver ripetuta la costruzione precedente, si conduca la tangente ST, e si prolunghi la CB sino all' incontro di OS in H. Ciò posto, avremo

$$\frac{EF}{BG} = \frac{EH}{EB} = \frac{DS}{DT}$$

Ma abbiamo

$$2EF = \text{sen}\, a + \text{sen}\, b,\quad 2BG = \text{sen}\, a - \text{sen}\, b,$$

$$DS = \text{tang}\, DA = \text{tang}\, \frac{1}{2}(a+b)$$

$$DT = \text{tang}\, DB = \text{tang}\, \frac{1}{2}(a-b)$$

conseguentemente

$$\frac{\text{sen}\, a + \text{sen}\, b}{\text{sen}\, a - \text{sen}\, b} = \frac{\text{tang}\, \frac{1}{2}(a+b)}{\text{tang}\, \frac{1}{2}(a-b)}$$

risultamento identico con la formula (LXIX).

CAPITOLO XIII.

Osservazioni sul principio generale della Trigonometria rettilinea.

112. Il principio della proporzionalità dei lati d'un triangolo qualunque coi seni degli angoli opposti si può considerare come il principio fondamentale della trigonometria rettilinea; ed a tal oggetto vogliamo dimostrare che da esso dipendono tutte le formule che servono alla risoluzione dei triangoli, e tutte quelle ancora che esprimono i varj rapporti esistenti tra le rette trigonometriche di due archi qualunque.

Abbiamo veduto che de' quattro casi cui può dar luogo la risoluzione d'un triangolo, due agevolmente si risolvono col principio summentovato; altri hanno d'uopo d'altro principio il quale si ha dalla Geometria, e che fa nascere le tre equazioni seguenti: n.° 58 e 59 (fig. 46)

$$\overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \pm 2AB.AC.\cos A$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 \pm 2AB.CB.\cos B$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{AC}^2 \pm 2CB.AC.\cos C$$

dove ha luogo il segno + dell'ultimo termine, allorquando l'angolo di cui si prende il coseno è ottuso, ed il segno — nel caso contrario. Ma si osservi che se A sarà ottuso, cos A in forza delle già stabilite convenzioni sarà una quantità negativa; per la medesima ragione sarà negativo cos B, o cos C, quando B, o C saranno ottusi: dunque in qualunque caso l'ultimo termine di dette equazioni risulta negativo. Di-

manierachè convenendo d' indicare i lati del triangolo colle medesime lettere che sono agli angoli opposti, ma prese nell' alfabeto minuscolo, avremo

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos C \end{aligned} \qquad (A)$$

donde si ricava che *in un triangolo rettilineo qualunque, il quadrato d' un lato è uguale alla somma de' quadrati degli altri lati, meno il doppio prodotto de' lati medesimi nel coseno dell' angolo che comprendono.*

Or questo principio non è che una conseguenza della proporzionalità dei lati d' un triangolo coi seni degli angoli opposti, la quale somministra queste tre equazioni

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen A}}{\text{sen B}} &= \frac{a}{b} \\ \frac{\text{sen A}}{\text{sen C}} &= \frac{a}{c} \\ \frac{\text{sen B}}{\text{sen C}} &= \frac{b}{c} \end{aligned} \qquad (B)$$

Sia condotta dal vertice C sul lato opposto A B la perpendicolare C D; dai triangoli A C D, C D B avremo, in virtù del principio medesimo, le due proporzioni

$$\frac{AD}{AC} = \frac{\text{sen ACD}}{\text{sen ADC}}, \quad \frac{DB}{CB} = \frac{\text{sen BCD}}{\text{sen BDC}}$$

Ma siccome gli angoli in D son retti, e il seno dell' angolo retto è uguale al raggio, ed inoltre

$$\text{sen ACD} = \cos A, \ \text{sen BCD} = \cos B,$$

avremo

$$AD = b \cos A, \quad DB = a \cos B$$

e quindi, osservando che $DB + AD = c$,

$$\begin{aligned} c &= a \cos B + b \cos A \\ b &= a \cos C + c \cos A \\ a &= b \cos C + c \cos B \end{aligned} \qquad (C)$$

moltiplicando la prima per c, la seconda per b, la terza per a, e sottraendo quindi la prima delle equazioni risultanti dalla somma delle altre due, otterremo la prima delle equazioni (A); con un calcolo analogo potrà aversi la seconda e la terza; lo che basta a dimostrare che dal principio della proporzionalità dei lati coi seni degli angoli opposti dipendono tutte le formule che servono alla risoluzione dei triangoli.

Dalle tre equazioni (C) si vede che *in ogni triangolo un lato è uguale alla somma degli altri due respettivamente moltiplicati pei coseni degli angoli che essi formano col primo*.

113. Reciprocamente da questo principio con facilità si deduce la proporzione dei lati coi seni degli angoli opposti. Infatti abbiamo veduto come da esso nascano le equazioni (A); ma la prima di esse, sostituendo a $\cos A$ il suo valore $\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 A}$, ne dà

$$\operatorname{sen} A = \frac{1}{2bc} \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4)}$$

dunque

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{M}{2abc}$$

indicando con M il radicale suddettto. Ad ottenere il va-

lore del rapporto $\frac{\text{sen B}}{b}$ converrebbe ripetere il medesimo calcolo partendo dalla seconda delle equazioni (A); ma poichè dalla prima si passa alla seconda cambiando a, A in b, B e viceversa, è chiaro che potremo fare a meno del calcolo, effettuando questi cambiamenti nel risultato precedente. Ora $\frac{M}{2abc}$ è una quantità indipendente dall' angolo A, ed M è una funzione simmetrica di a, b, c; adunque sarà

$$\frac{\text{sen B}}{b} = \frac{M}{2abc};$$

e per la stessa ragione

$$\frac{\text{sen C}}{c} = \frac{M}{2abc},$$

ed in conseguenza

$$\frac{\text{sen A}}{a} = \frac{\text{sen B}}{b} = \frac{\text{sen C}}{c}$$

come dovevasi dimostrare.

114. Colla medesima facilità deduconsi dal principio stesso le formule (XXV), (XXVI) n.° 79 dalle quali hanno origine tutte le altre di che abbiamo tenuto proposito ne' capitoli precedenti, e che servono di base alla teoria delle quantità trigonometriche.

Abbiamo veduto essere

$$a = b \cos C + c \cos B;$$

Ora abbiamo

$$b = a \frac{\text{sen B}}{\text{sen A}}, \quad c = a \frac{\text{sen C}}{\text{sen A}},$$

adunque sostituendo avremo

$$\text{sen A} = \text{sen B} \cos C + \text{sen C} \cos B;$$

e poichè in ogni triangolo la somma dei tre angoli è uguale a due retti, A altro non sarà che il supplemento di B + C e sarà

$$\text{sen}\, A = \text{sen}\,(B + C)$$

e conseguentemente otterremo

$$\text{sen}\,(B + C) = \text{sen}\, B \cos C + \text{sen}\, C \cos B \qquad (D)$$

formula identica con la (xxv), n.° 79.

Da essa poi è facile ricavare la formula (xxvi): infatti essendo

$$\cos\,(B + C) = \sqrt{1 - \text{sen}^2\,(B + C)}$$

sarà

$$\cos\,(B + C) = \sqrt{(1 - \text{sen}^2 B \cos^2 C - \text{sen}^2 C \cos^2 B - 2\,\text{sen}\, B\, \text{sen}\, C \cos B \cos C)}$$

e ponendo

$$\cos^2 C = 1 - \text{sen}^2 C, \quad \text{sen}^2 C = 1 - \cos^2 C$$

avremo

$$\cos\,(B + C) = \sqrt{(\cos^2 B \cos^2 C + \text{sen}^2 B\, \text{sen}^2 C - 2 \cos B \cos C\, \text{sen}\, B\, \text{sen}\, C)}$$

È facil vedere che il trinomio posto sotto il segno radicale non è che il quadrato della differenza dei termini cos B cos C, sen B sen C; e poichè per la composizione del quadrato medesimo è indifferente che il secondo venga tolto dal primo, o viceversa il primo dal secondo, dovendo estrarre la radice quadrata cadesi naturalmente nell'incertezza che il risultamento debba essere

$$\cos B \cos C - \text{sen}\, B\, \text{sen}\, C$$

ovvero

$$\text{sen}\, B\, \text{sen}\, C - \cos B \cos C$$

Ma osservisi che se per le riflessioni fatte al n° 57, B, C e

B + C debbono esser minori del quadrante, il valore risultante di cos (B + C) dovrà essere positivo e concordare con la fig. 36. È da vedersi adunque quale de' due termini suddetti sia coerentemente alla figura medesima il più grande. Ora per la similitudine de' due triangoli E B I, M P C abbiamo

$$EB : EI :: PC : MP$$

e però

$$EB \times MP = EI \times PC$$

e poichè $EI < EC$, sarà $EB \times MP < EC \times PC$, ovvero il prodotto de' seni minore di quello dei coseni; in conseguenza la formula da stabilirsi sarà

$$\cos(B + C) = \cos B \cos C - \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \qquad (E)$$

identica colla formula (XXVI), n.° 79.

Queste formule (D) ed (E) dovendo aver luogo per qualunque valore di B e C, dovranno esser vere anco nel caso in cui $B = \pi - B$; talmentechè avremo

$$\operatorname{sen}[\pi - (B - C)] = \operatorname{sen}(\pi - B) \cos C + \operatorname{sen} C \cos(\pi - B)$$

$$\cos[\pi - (B - C)] = \cos(\pi - B) \cos C - \operatorname{sen} C \operatorname{sen}(\pi - B)$$

e siccome il coseno d'un angolo è uguale al seno del suo complemento, e viceversa, sarà pure

$$\cos(B - C) = \cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$$

$$\operatorname{sen}(B - C) = \operatorname{sen} B \cos C - \operatorname{sen} C \cos B$$

risultamenti identici colle formule (XXXIII) e (XXXIV) che d'altra parte avevamo tratte dalle formule (XXV) e (XXVI) mediante l'eliminazione (n° 81). Resta frattanto dimostrato che dal principio della proporzionalità dei lati coi seni degli angoli opposti dipendono pure tutte le formule esprimenti le relazioni delle rette trigonometriche di due archi.

115. Se l'angolo A fosse retto, il triangolo sarebbe rettangolo, ed avremmo $\cos A = 0$: quindi le equazioni (C) si cambierebbero nelle seguenti

$$c = a \cos B, \; b = a \cos C \qquad (F)$$

$$a = b \cos C + c \cos B \qquad (G)$$

inoltre, poichè B è complemento di C,

$$c = a \operatorname{sen} C, \; b = a \operatorname{sen} B \qquad (H)$$

e ponendo nella (G) i valori di b e c tratti dalle (F), risulterà il noto teorema

$$a^2 = b^2 + c^2$$

finalmente eliminando a dalle (F) ed (H) troveremo

$$b = c \operatorname{tang} B, \; c = b \operatorname{tang} C \qquad (I)$$

E questi sono i quattro principj relativi alla risoluzione dei triangoli rettangoli i quali conseguono al principio generale, come già dimostrammo nel Capitolo II.

116. Or per quanto la risoluzione dei triangoli abbia già formato oggetto delle nostre indagini, e sia stata eseguita in tutti i casi che possono occorrere, (Cap. I, II) pur nonostante conviene sottoporla a nuovo esame, potendosi a questo luogo profittare di tutti i mezzi della trigonometria, per stabilire metodi più semplici de' già esposti.

Primieramente osserveremo che le formule per mezzo delle quali si determinano in ogni caso i tre elementi ignoti, debbono essere di tale composizione che si presti al calcolo logaritmico, ed inoltre debbono essere per quanto si può indipendenti tra loro; perchè, se avendo determinato un elemento come b, ci varremo di b per determinare ex: gr: C, o A, ad un grave inconveniente possiamo andare incontro; che essendo erroneo il valore di b per sbaglio com-

messo nel calcolo, risulti parimente erroneo quello di C e di A. Inoltre prima di applicare le formule che fossero per avventura stabilite nell'ipotesi di $a = 1$, a qualche caso particolare da risolversi col soccorso delle tavole in uso, converrà rendere le formule medesime omogenee, ove nol sieno, mediante l'opportuno collocamento del fattore R, e ritenendo poi nell'applicazione numerica (Cap. VIII)

$$R = 10^{10}, \log. R = 10.$$

CAPITOLO XIV.

Risoluzione generale dei triangoli rettilinei rettangoli.

117. Quando il triangolo da risolversi è rettangolo, un elemento sempre si suppone implicitamente compreso fra i dati, e questo è l'angolo retto. Ora se i casi altro non sono che i problemi essenzialmente diversi che si possono presentare intorno alla risoluzione d'un triangolo, è manifesto che pei triangoli rettangoli due soli casi bisognerebbe distinguere; secondochè fossero dati un angolo, e un lato, oppure i due lati: ma siccome essendo dati un lato ed un angolo, esso lato può essere l'ipotenusa, oppure uno di quelli che costituiscono l'angolo retto; ed essendo dati due lati può uno di essi essere l'ipotenusa, oppure ambedue possono essere quelli dell'angolo retto, perciò vengono distinti quattro casi, gli elementi dati potendo essere

1.° Un angolo, e l'ipotenusa.

2.° Un angolo ed un lato dell'angolo retto.

3.° L'ipotenusa ed un lato dell'angolo retto.

4.° I due lati dell'angolo retto.

Per dimostrare che la risoluzione d'un triangolo rettan-

golo non può dar luogo ad altri casi, osserviamo che essa riducesi in generale a determinare due cose delle cinque B, C, a, b, c. Ora le combinazioni diverse che si ponno fare con 5 cose prese 2 a 2 sono 10, delle quali due

$$B, a; \quad C, a$$

entrano nel primo caso; quattro

$$B, b; \quad B, c; \quad C, b; \quad C, c$$

entrano nel secondo; due

$$a, b; \quad a, c$$

entrano nel terzo; una

$$b, c$$

entra nel quarto; ed una finalmente, quella de' due angoli,

$$B, C,$$

è da escludersi, come già sappiamo.

PRIMO CASO

118. Essendo data l'ipotenusa a, e l'angolo acuto B, trovare l'angolo C, ed i lati b e c.

Primieramente

$$C = 90^\circ - B$$

Quindi avremo

$$b = \frac{a \operatorname{sen} B}{R}; \quad \log b = \log a + \log \operatorname{sen} B - 10$$

$$c = \frac{a \cos B}{R}; \quad \log c = \log a + \log \cos B - 10$$

SECONDO CASO.

119. Essendo dato un lato b dell'angolo retto, ed uno degli angoli acuti, trovar l'ipotenusa e l'altro lato.

Dal valore di uno degli angoli acuti agevolmente si deduce il valore dell'altro: supporremo che sia noto quello di B:

$$C = 90^\circ - B$$

$$a = \frac{bR}{\text{sen}\,B}\,;\ \log a = \log b + \overline{10 - \log \text{sen}\,B}$$

$$c = \frac{bR}{\text{tang}\,B}\,;\ \log c = \log b + \overline{10 - \log \text{tang}\,B}$$

Le espressioni $\overline{10 - \log \text{sen}\,B}$, $\overline{10 - \log \text{tang}\,B}$ sono i complementi aritmetici di $\log \text{sen}\,B$, $\log \text{tang}\,B$, per mezzo dei quali abbreviasi notabilmente il calcolo.

TERZO CASO

120. Essendo data l'ipotenusa a, ed un lato b, trovare il terzo lato e i due angoli acuti.

$$\text{sen}\,B = \frac{bR}{a}\,;\ \log \text{sen}\,B = \log b + \overline{10 - \log a}$$

quindi

$$C = 90^\circ - B$$

avremo direttamente C anche dall' equazioni

$$\cos C = \frac{bR}{a}\,;\ \log \cos C = \log b + \overline{10 - \log a}$$

finalmente

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

e affinchè si possa applicare alla formola il calcolo logaritmico, converrà che sia trasformata nella seguente

$$c = \sqrt{(a+b)(a-b)}\,;$$

$$\log c = \frac{1}{2}\left[\log(a+b) + \log(a-b)\right]$$

Volendo profittare del valore di B, potremmo avere il terzo elemento c dall' equazione

$$c = \frac{a \cos B}{R}; \ \log c = \log a + \log \cos B - 10$$

ovvero dalla

$$c = \frac{b R}{\tang B}; \ \log c = \log b + \overline{10 - \log \tang B}$$

mai noi abbiamo detto (n.° 116) che le formule conviene che sieno indipendenti tra loro.

QUARTO CASO

121. Essendo dati i due lati b e c dell' angolo retto, trovare l' ipotenusa e gli angoli.

$$\tang B = \frac{b R}{c}; \ \log \tang B = \log b + \overline{10 - \log c}$$

quindi

$$C = 90^\circ - B.$$

C potrebbe aversi direttamente dall' equazione

$$\tang C = \frac{c R}{b}; \ \log \tang C = \log c + \overline{10 - \log b}$$

finalmente

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

ma poichè questa formula non si presta al calcolo logaritmico, ci varremo piuttosto dell' angolo B determinato, e ricorreremo all' equazione

$$a = \frac{b R}{\sen B}; \ \log a = \log b + \overline{10 - \log \sen B}$$

e sarà questo l' unico caso in cui per comodo di calcolo è d' uopo allontanarsi dal canone del n.° 116.

CAPITOLO XV.

Osservazioni sopra i varj casi della risoluzione de' triangoli rettilinei rettangoli.

122. È facile vedere che il triangolo rettangolo sarà sempre d'una possibile costruzione, qualunque sieno i valori numerici assegnati ai dati nei casi precedenti, ad eccezione del terzo, dove è necessario che il valore numerico di b sia minore di quello dell'ipotenusa a. Se avesse luogo il contrario, con una facile costruzione geometrica potremmo dimostrare l'impossibilità del triangolo. Ma ciò vien pure indicato dalla stessa formula logaritmica che in tal caso risulterebbe assurda.

Infatti la formula che in questo caso dà il valore di B, essendo

$$\log \operatorname{sen} B = \log b + 10 - \log a$$

se sarà $b > a$, avremo $\log b > \log a$, e $\log b - \log a > 0$, e $\log \operatorname{sen} B > 10$, ovvero $\operatorname{sen} B > R$, lo che è impossibile, poichè i seni sono tutti minori del raggio. Negli altri casi i valori assegnati non riescono mai incompatibili tra loro, nè coi valori degli elementi che in conseguenza si determinano.

CAPITOLO XVI.

Risoluzione dei triangoli rettilinei obliquangoli.

123. Avendo già comprovato (n.° 49) che i casi essenzialmente diversi cui può dar luogo la risoluzione d'un

triangolo obliquangolo sono quattro, prenderemo immediatamente a risolverli.

PRIMO CASO

Essendo dati il lato a, e due angoli del triangolo, trovare gli altri due lati ed il terzo angolo.

I due angoli dati sieno A, B; avremo

$$C = 180^\circ - (A + B)$$

quindi

$$b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}\,;\ \log b = \log a + \log \operatorname{sen} B - \log \operatorname{sen} A$$

$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}\,;\ \log c = \log a + \log \operatorname{sen} C - \log \operatorname{sen} A$$

SECONDO CASO

124. Essendo dati i due lati a e b coll'angolo A opposto ad uno di questi lati, trovare il terzo lato c e gli altri due angoli B e C

L'angolo B si ha dall'equazione

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a}\,;\ \log \operatorname{sen} B = \log \operatorname{sen} A + \log b - \log a$$

$$C = 180^\circ - (A + B)$$

abbiamo ancora

$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}\,;\ \log c = \log a + \log \operatorname{sen} C - \log \operatorname{sen} A$$

125. E qui convien ripetere le osservazioni che già furono fatte al (n° 57); dalle quali risulta; 1.° che essendo A ottuso, B non può esser che acuto; 2.° che essendo A acuto ed $a > b$, B parimente sarà acuto; 3.° che essendo A acuto, e $b > a$, rimane incerta la natura di B, per lo che, ad evi-

tare la doppia soluzione che in questo caso ha luogo, converrà che la natura medesima del triangolo sia indicata da qualche particolare circostanza del problema.

TERZO CASO

126. Essendo dati due lati a, b e l'angolo compreso C, trovare gli altri due angoli ed il terzo lato.

Per determinare gli angoli A, B indipendentemente dal lato c, osserveremo primieramente che essendo

$$A + B + C = 180^\circ,$$

sarà ancora

$$\frac{1}{2}(A+B) = 90^\circ - \frac{1}{2}C;$$

laonde possiamo supporre cognita la semi-somma degli angoli A e B. Or poichè

$$\frac{\tang \frac{1}{2}(A-B)}{\tang \frac{1}{2}(A+B)} = \frac{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}$$

riflettendo che dalla formula

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} = \frac{a}{b}$$

si ricava

$$\frac{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B} = \frac{a-b}{a+b}$$

avremo ancora

$$\frac{\tang \frac{1}{2}(A-B)}{\tang \frac{1}{2}(A+B)} = \frac{a-b}{a+b}$$

e quindi, essendo

$$\tang \frac{1}{2}(A+B) = \cot \frac{1}{2}C,$$

otterremo finalmente

$$\tang \frac{1}{2}(A - B) = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{1}{2} C.$$

Con questa equazione, nella quale supponiamo $a > b$ e per conseguenza $A > B$, si determina il valore della semi-differenza degli angoli A e B; sia un tal valore m; dalle equazioni

$$\frac{1}{2}(A + B) = 90^\circ - \frac{1}{2} C, \frac{1}{2}(A - B) = m$$

si ricava per addizione

$$A = 90^\circ - \frac{1}{2} C + m$$

e per sottrazione

$$B = 90^\circ - \frac{1}{2} C - m$$

Si osservi che la semi-differenza degli angoli si calcola facilmente coi logaritmi, ed abbiamo

$$\log \tang \frac{1}{2}(A - B) =$$

$$\log(a - b) + \log \cot \frac{1}{2} C - \log(a + b)$$

127. Ma da questa equazione si vede che ove fossero dati di a e b i soli logaritmi, converrebbe cominciare dal determinarne i numeri corrispondenti, senza di che non potremmo fare uso dell' equazione medesima. Or per ovviare a tale inconveniente poniamo $\frac{a}{b} = \frac{\tang \phi}{R}$; ciò è sempre possibile, poichè le tangenti sono suscettibili di assumere qualunque valore; quindi dalla formula (XXXVIII) ricaviamo il valore di $\tang(\phi - 45^\circ)$; siccome $\tang 45^\circ = R$, sarà

$$\tang(\phi - 45^\circ) = \frac{\tang\phi - 1}{\tang\phi + 1};$$

ossia

$$\tang(\phi - 45^\circ) = \frac{a-b}{a+b};$$

ed in conseguenza

$$\tang(\phi - 45^\circ) = \frac{\tang\frac{1}{2}(A-B)}{\tang\frac{1}{2}(A+B)} = \frac{\tang\frac{1}{2}(A-B)}{\cot\frac{1}{2}C}$$

dunque

$$\tang\phi = \frac{aR}{b}, \quad \log\tang\phi = \log a + \overline{10 - \log b}$$

$$\tang\frac{1}{2}(A-B) = \frac{\tang(\phi - 45^\circ)\cot\frac{1}{2}C,}{R}$$

$$\log\tang\frac{1}{2}(A-B) = \log\tang(\phi - 45^\circ) + \log\cot\frac{1}{2}C - 10$$

Avendo supposto $a > b$ sarà $\tang\phi > R$, e perciò $\phi > 45^\circ$.

128. Conoscendo gli angoli A e B, il terzo lato c si trova coll' equazione

$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}; \quad \log c = \log a + \log\operatorname{sen} C - \log\operatorname{sen} A$$

oppure coll' equazione

$$c = \frac{b \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B}; \quad \log c = \log b + \log\operatorname{sen} C - \log\operatorname{sen} B$$

129. Ma il terzo lato può anche determinarsi indipendentemente dal valore degli angoli, nel modo che fu da noi praticato al (n° 58). L' equazione sarà

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\cos C)}$$

la quale dà C per mezzo dei dati a, b, C; ma siccome non

può applicarvisi il calcolo logaritmico, perciò si rende necessario trasformarla nel modo che segue.

Aggiungiamo e sottragghiamo $2ab$ dalla quantità posta sotto il segno radicale, e dipoi ad $1 - \cos C$ sostituiscasi $2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C$ (xxxv); risulterà

$$c = \sqrt{[(a-b)^2 + 2ab(1 - \cos C)]}$$

$$c = \sqrt{[(a-b)^2 + 4ab \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} C]} \qquad (N)$$

e finalmente

$$c = (a-b)\sqrt{\left[1 + \frac{4ab \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C}{(a-b)^2}\right]}$$

Ciò posto, sia ϕ tale angolo che il quadrato della sua tangente possa essere rappresentato da

$$\frac{4ab \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C}{(a-b)^2};$$

avremo allora pel valore di c

$$c = (a-b)\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \phi}$$

$$c = (a-b) \sec \phi = \frac{a-b}{\cos \phi};$$

adunque ristabilendo l'omogeneità, sarà

$$\operatorname{tang} \phi = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} C}{a-b} \sqrt{ab};$$

$$\log \operatorname{tang} \phi = \log 2 + \log \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} C$$

$$+ \tfrac{1}{2} \log a + \tfrac{1}{2} \log b - \log (a-b)$$

$$c = \frac{(a-b)R}{\cos\phi}\,;\ \log c = \log(a-b) + \overline{10 - \log\cos\phi}$$

130. Trovato c, si potrebbero trovar gli angoli A e B con le formule

$$\log \operatorname{sen} A = \log \operatorname{sen} C + \log a - \log c$$

$$\log \operatorname{sen} B = \log \operatorname{sen} C + \log b - \log c$$

e fatto il calcolo, la condizione

$$A + B + C = 180^\circ$$

cui debbono soddisfare i tre angoli del triangolo, potrà servire di mezzo di verificazione. Essa però sarebbe insufficiente, ove si preferisse il precedente metodo; perchè essendo

$$A = 90^\circ - \frac{1}{2}C + m$$

$$B = 90^\circ - \frac{1}{2}C - m$$

avremo sempre

$$A + B = 180^\circ - C$$

ovvero

$$A + B + C = 180^\circ$$

anche nel caso in cui m fosse erroneo.

131. Il valore di c è suscettibile d'altra trasformazione che giova conoscere. Ci partiremo dall'espressione (N), ed osserveremo che

$$(a-b)^2 = a^2\left(\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}C + \cos^2\frac{1}{2}C\right)$$

$$-2ab + b^2\left(\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}C + \cos^2\frac{1}{2}C\right)$$

$$4ab\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}C = 2ab\left(1 - \cos^2\frac{1}{2}C\right) + 2ab\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}C$$

$$= 2ab - 2ab\cos^2\frac{1}{2}C + 2ab\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}C$$

quindi avremo

$$c = \sqrt{\left[(a^2 + 2ab + b^2)\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}C\right.}$$

$$\left. + (a^2 - 2ab + b^2)\cos^2\frac{1}{2}C\right]$$

e finalmente

$$c = \sqrt{\left[(a+b)^2\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}C + (a-b)^2\cos^2\frac{1}{2}C\right]}$$

donde si vede che c è l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo nel quale i lati che costituiscono l'angolo retto sono

$$(a+b)\,\mathrm{sen}\frac{1}{2}C,\ (a-b)\cos\frac{1}{2}C.$$

Questo triangolo rettangolo si può agevolmente costruire nel seguente modo.

Il triangolo corrispondente agli elementi a, b, c sia ABC (fig. 47); $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $BCA = C$. Prolunghisi il lato AC da ambe le parti, e fatto centro in C si descriva la mezza circonferenza NBM col raggio BC; avremo

$$AM = a + b,\ AN = a - b.$$

Si conducano le corde BN, BM, ed AD parallela ad NB; l'angolo NBM sarà retto, ed AD sarà perpendicolare a BM. Or dal triangolo rettangolo ADM si ha

$$AD = AM\,\mathrm{sen}\,DMA = (a+b)\,\mathrm{sen}\frac{1}{2}C$$

$$DM = AM\cos DMA = (a+b)\cos\frac{1}{2}C$$

E poichè abbiamo

$$\frac{BD}{NA} = \frac{DM}{AM},$$

avremo ancora

$$BD = \frac{DM.AN}{AM} = \frac{(a-b)(a+b)}{a+b} \cos \frac{1}{2} C$$

ovvero

$$BD = (a-b) \cos \frac{1}{2} C$$

e così risulta finalmente

$$BA = \sqrt{[\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2]} =$$

$$\sqrt{[(a+b)^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C + (a-b)^2 \cos^2 \frac{1}{2} C]}$$

Quindi si vede che la risoluzione del triangolo ABC di cui sono dati due lati a, b e l'angolo compreso C, si riduce a quella del triangolo rettangolo ABD di cui si possono considerare come noti i lati costituenti l'angolo retto, poichè i loro valori sono dati dalle quantità cognite a, b, C e si determinano mediante le equazioni

$$AD = (a+b) \operatorname{sen} \frac{1}{2} C, \; BD = (a-b) \cos \frac{1}{2} C.$$

QUARTO CASO

132. Essendo dati i tre lati a, b, c, trovare i tre angoli.

La risoluzione delle equazioni (A) (n° 112) somministra queste espressioni dei coseni degli angoli

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

le quali essendo funzioni dei lati, risolvono il caso di cui si tratta.

Giova però sottoporle alla seguente trasformazione, acciocchè possano calcolarsi coi logaritmi.

Sostituendo nella formula

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A = 1 - \cos A$$

il suddetto valore di cos A, avremo

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} =$$

$$\frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

e quindi

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}$$

e siccome il valore di cos A si cambia in quello di cos B permutando a in b, e viceversa, avremo pure

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(a+b-c)(b-a+c)}{4ac}}$$

e per la medesima ragione

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(a+c-b)(b-a+c)}{4ab}}$$

ed indicando il perimetro $a+b+c$ del triangolo con $2p$, otterremo

$$a+b-c = 2p - 2c$$

$$a-b+c = 2p - 2b$$

$$b+c-a = 2p - 2a$$

e quindi avremo le formule

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}\,B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$$

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}\,C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

formule che agevolmente si calcolano in logaritmi; così ristabilita l'omogeneità fra i termini, avremo

$$\log\text{sen}\,\frac{1}{2}\,A = \frac{1}{2}\,[\log(p-b) + \log(p-c)$$

$$+ \text{comp}\log b + \text{comp}\log c\,]$$

$$\log\text{sen}\,\frac{1}{2}\,B = \frac{1}{2}\,[\log(p-a) + \log(p-c)$$

$$+ \text{comp}\log a + \text{comp}\log c\,]$$

$$\log\text{sen}\,\frac{1}{2}\,C = \frac{1}{2}\,[\log(p-a) + \log(p-b)$$

$$+ \text{comp}\log a + \text{comp}\log b\,]$$

in questo modo si determinano le metà degli angoli, e quindi si hanno gli angoli stessi.

133. Questi angoli si possono però ottenere anche per mezzo dei loro coseni e delle loro tangenti; eccone le formule relative. Dalla formula (xxxvi) n.° 83

$$2\cos^2\frac{1}{2}\,A = 1 + \cos A;$$

si ricava

$$2\cos^2\frac{1}{2}\,A = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} =$$

$$\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc}$$

e quindi si ottengono i valori

$$\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}}$$

$$\cos\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+c-b)}{4ac}}$$

$$\cos\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4ab}}$$

le quali formule si possono più semplicemente esprimere nel seguente modo

$$\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\cos\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$$

$$\cos\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

E in virtù della formula

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}A=\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}A}$$

sostituendo i valori di sen $\frac{1}{2}$ A, cos $\frac{1}{2}$ A, avremo

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

CAPITOLO XVII.

Osservazioni sopra i quattro casi della risoluzione dei triangoli obliquangoli.

134. L'unica condizione che si esige nel primo caso, acciocchè la risoluzione non riesca assurda, si è che la somma de' due angoli dati sia minore di 180°.

135 In quanto al secondo caso, osserveremo; 1.° che essendo A ottuso, e dovendo essere in conseguenza B acuto, è d'uopo che si abbia $a > b$; se si avesse $a < b$, l'equazione stessa dimostrerebbe l'incompatibilità di questi dati: infatti avremmo sen A $<$ sen B, e l'angolo acuto supplemento di A, sarebbe minore di B, cioè $180° - A < B$, e quindi $A + B > 180°$, assurdo evidente.

2.° Essendo A acuto, a potrà essere uguale, maggiore o minore di b. Se però fosse $a =$, ovvero $> b$, l'equazione darebbe sen B $=$, ovvero $<$ sen A, e quindi B $=$, ovvero $<$ A; in tal caso il supplemento di B non soddisfarebbe al problema, perchè aggiungendo al supplemento medesimo $A + C$, abbiamo la quantità $180° + A - B + C$ evidentemente maggiore di 180°; condizione assurda.

3.° Se poi essendo A acuto (Fig. 31) fosse $a < b$, l'equazione stessa dimostrerebbe dovere essere a necessariamente uguale o maggiore della perpendicolare CD abbassata sopra c dal vertice opposto: infatti abbiamo $CD = \frac{b \text{ sen } A}{R}$, e sen $A = \frac{R \cdot CD}{b}$; sostituendo questo valore di sen A nell'equazione sen $B = \frac{b \text{ sen } A}{a}$, sarà sen $B = \frac{R \cdot CD}{a}$; ora se CD

fosse minore di a, sarebbe sen B $>$ R; lo che è assurdo. Se fosse CD $= a$, sarebbe sen B $=$ R, B $= 90^{\circ}$, il triangolo ABC sarebbe rettangolo in B ed una sola soluzione avrebbe luogo. Finalmente se fosse CD $> a$ ci troveremmo nell'unico caso in cui la doppia soluzione non può evitarsi, che per qualche particolar circostanza del problema.

136. Nel terzo caso non si va mai incontro ad alcuna assurdità; infatti la costruzione del triangolo è sempre possibile qualunque sia il valore dell'angolo C e de' lati a, b, che lo costituiscono.

137. Finalmente nel quarto caso la possibile determinazione del triangolo esige che sia

$$a < b + c,\ b < a + c,\ c < a + b.$$

Ciò si deduce dalla stessa formula

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}$$

Infatti ad evitare ogni assurdità converrà 1° che il radicale sia reale; 2° che esso esprima una quantità minore di R ovvero minore di 1. La prima condizione si verifica tostochè

$$a + b > c,\ a + c > b;$$

essa potrebbe essere verificata da $a + b < c$, $a + c < b$, ma se ciò fosse, dalla somma di queste due disuguaglianze ricaveremmo $a + b + a + c < c + b$ ovvero $2a < 0$, lo che è impossibile. La seconda condizione si traduce in

$$\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}} < 1$$

ovvero in quest' altra

$$\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc} < 1,$$

ovvero anche in

$$[a+(b-c)][a-(b-c)] < 4bc,$$

ovvero finalmente in questa

$$a^2-(b-c)^2 < 4bc;$$

e sviluppando il quadrato di $b-c$, avremo pure

$$a^2-b^2-c^2-2bc < 0, \quad a^2 < (b+c)^2,$$

e finalmente

$$b+c > a.$$

138. Se nella formula

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}$$

faremo $b=c$, avremo

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}A = \frac{a}{2b}$$

ovvero, ristabilendo l'omogeneità,

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}A = \frac{aR}{2b}.$$

Questa equazione risolve tutti i casi cui può dar luogo la risoluzione dei triangoli isosceli ne' quali a è la base, A l'angolo al vertice, b uno de' due lati uguali. Un triangolo isoscele resta determinato allorquando sono dati due de' suoi elementi; se i dati saranno a, b, avremo A dalla formula

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}A = \frac{aR}{2b};$$

se i dati saranno a, A, avremo b dalla formula

$$b = \frac{aR}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} A};$$

finalmente se i dati saranno b, A, avremo a dalla formula

$$a = \frac{2 b \operatorname{sen} \frac{1}{2} A}{R}.$$

Vero è che in luogo dell' angolo A potrebbe esser dato B, cioè uno de' due angoli uguali; ma questo non è caso da contemplarsi, poichè da B agevolmente deducesi A, stante l' equazione

$$B = 90^\circ - \frac{1}{2} A.$$

PARTE SECONDA

APPLICAZIONE DELLA TRIGONOMETRIA RETTILINEA ALLA RISOLUZIONE DE' PROBLEMI ED ALLA DIMOSTRAZIONE DEI TEOREMI DI GEOMETRIA PIANA.

PROBLEMA I.

139. Determinare la superficie d'un triangolo, essendo dati tre de' suoi elementi.

Sono da distinguersi quattro casi corrispondenti ai quattro casi della risoluzione d'un triangolo.

1.° Essendo dati due angoli ed un lato qualunque.

Indicando con Σ la superficie del triangolo, e prendendo per base il lato dato $AB = c$ (fig. 46), avremo

$$\Sigma = \frac{1}{2} c \times CD.$$

Ora $CD = AC \operatorname{sen} A$, ed $AC = \frac{c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}$; dunque

$$\Sigma = \frac{c^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{2 \operatorname{sen} C};$$

formula nella quale potremo sempre sostituire ad uno dei tre angoli la somma degli altri due dati, poichè il seno d'un angolo è uguale al seno del suo supplemento. Supponendo che gli angoli dati sieno A, B, avremo pertanto

$$\Sigma = \frac{c^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{2 \operatorname{sen}(A+B)} \qquad (\text{I})$$

2.° Essendo dati due lati, e l'angolo opposto ad uno di essi.

Nel supposto che i lati sieno a, b, e l'angolo A, osserveremo che da $CD = AC \operatorname{sen} A = b \operatorname{sen} A$ ricavasi

$$\Sigma = \frac{1}{2} b c \operatorname{sen} A. \qquad (\text{II})$$

Da essa conviene eliminare c non compreso fra i dati: a tal uopo si prenda l'equazione $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, e si risolva rapporto a c, sarà

$$c = b \cos A \pm \sqrt{(b^2 \cos^2 A + a^2 - b^2)};$$

e poichè

$$b^2 \cos^2 A - b^2 = -b^2 (1 - \cos^2 A) = -b^2 \operatorname{sen}^2 A,$$

avremo

$$c = b \cos A \pm \sqrt{(a^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 A)};$$

e quindi

$$\Sigma = \frac{1}{2} b \operatorname{sen} A [b \cos A \pm \sqrt{(a^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 A)}]. \qquad (\text{III})$$

A questa formula però non si può applicare il calcolo logaritmico come alla precedente; d'altra parte essa somministra due valori per Σ, lo che concorda col doppio triangolo cui dà luogo in generale questo caso.

3.° Essendo dati due lati e l'angolo compreso.

Se i lati saranno a, b, e l'angolo A, avremo

$$\Sigma = \frac{1}{2} b c \operatorname{sen} A, \qquad (\text{II})$$

formula identica a quella che abbiamo trovato sopra.

4.° Essendo dati i tre lati.

Poichè (XXVII), n.° 80

$$\text{sen}\,A = 2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A$$

sostituendo i valori di

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}A,\ \cos\frac{1}{2}A$$

tratti dalle formule che risolvono il caso quarto, n.° 132 e 133, avremo

$$\Sigma = \sqrt{[p(p-a)(p-b)(p-c)]} \qquad (\text{IV})$$

PROBLEMA II.

140. Determinare il raggio del circolo circoscritto ad un triangolo.

Sia O (fig. 48) il centro del circolo circoscritto al triangolo ABC; conduciamo i raggi OA, OB e la perpendicolare OD sopra AB; gli angoli ACB, AOD, essendo ambedue misurati dalla metà dell'arco AB, saranno uguali; talmentechè avremo

$$AD = AO\,\text{sen}\,C;$$

avremo pure

$$CD' = CO\,\text{sen}\,B,\ BD'' = BO\,\text{sen}\,A$$

ma $AO = CO = BO$ ed

$$AD = \frac{1}{2}c,\ CD' = \frac{1}{2}b,\ BD'' = \frac{1}{2}a,$$

dunque, indicando con r il raggio del circolo,

$$\begin{aligned} c &= 2r\,\text{sen}\,C \\ b &= 2r\,\text{sen}\,B \\ a &= 2r\,\text{sen}\,A; \end{aligned} \qquad (\text{V})$$

da queste equazioni si ricava

$$r = \frac{c}{2 \operatorname{sen} C} = \frac{b}{2 \operatorname{sen} B} = \frac{a}{2 \operatorname{sen} A}; \qquad (\text{VI})$$

si ricava pure

$$2p = 2r(\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C) \qquad (\text{VII})$$

$$r = \frac{p}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C} \qquad (\text{VIII})$$

donde segue 1.° che il raggio del circolo circoscritto ad un triangolo è uguale ad uno qualunque de' suoi lati diviso pel doppio del seno dell'angolo opposto, oppure uguale al semi-perimetro del triangolo stesso diviso per la somma de' seni de' suoi angoli; 2.° che il perimetro d'un triangolo è uguale al diametro del circolo circoscritto moltiplicato per la somma de' seni degli angoli.

141. Dalle stesse equazioni (V) si deduce di più che in un triangolo il rapporto costante de' lati a' seni degli angoli opposti è uguale al diametro del circolo circoscritto; infatti

$$\frac{c}{\operatorname{sen} b} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{a}{\operatorname{sen} A} = 2r.$$

Questo rapporto si può esprimere per una funzione dei soli lati, profittando della formula che si trova al n.° 113, dalla quale si ha

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{2abc}{\sqrt{[2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4)]}};$$

perlochè si trova

$$r = \frac{abc}{\sqrt{[2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4)]}} \qquad (\text{IX})$$

la quantità posta sotto il segno radicale si può mettere sotto una forma che si presti al calcolo logaritmico.

Infatti essa è uguale a

$$4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2;$$

ora

$$4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$$
$$=(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)$$
$$=[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]$$
$$=(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a);$$

poichè $a+b+c=2p$, sarà

$$r=\frac{abc}{4\sqrt{[p(p-a)(p-b)(p-c)]}} \qquad (x)$$

E poichè

$$\sqrt{[p(p-a)(p-b)(p-c)]}=\Sigma \quad (\text{n.}^{\circ}\ 139.\ \text{IV})$$

Avremo ancora

$$r=\frac{abc}{4\Sigma},$$

ovvero

$$\Sigma=\frac{abc}{4r}; \qquad (xi)$$

dunque la superficie d' un triangolo è uguale al prodotto de' suoi tre lati diviso pel doppio del diametro del circolo circoscritto.

PROBLEMA III.

142. Determinare il raggio del circolo iscritto in un triangolo.

Essendo ABC (fig. 49) il triangolo, O il centro del circolo iscritto, ed OD, OD′, OD″ rette condotte dal centro ai punti di contatto, ed in conseguenza perpendicolari ai lati, avremo

$$AD = OD \cot \frac{1}{2} A,$$

$$BD' = OD' \cot \frac{1}{2} B,$$

$$CD'' = OD'' \cot \frac{1}{2} C;$$

sommando queste equazioni, osservando che $AD = AD''$, $BD' = BD$, $CD'' = CD'$, ed indicando il raggio del circolo con r', otterremo

$$r' = \frac{p}{\cot \frac{1}{2} A + \cot \frac{1}{2} B + \cot \frac{1}{2} C} \qquad \text{(XII)}$$

donde segue che il raggio del circolo iscritto in un triangolo è uguale alla metà del suo perimetro divisa per la somma delle cotangenti delle metà de' suoi angoli.

Se il triangolo fosse equilatero sarebbe

$$A = B = C = 60^\circ;$$

e perciò

$$\cot \frac{1}{2} A = \cot \frac{1}{2} B = \cot \frac{1}{2} C = \cot 30^\circ;$$

or dal dato (n.° 87) $\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$, si ricava

$$\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \cot 30^\circ = \sqrt{3};$$

per lo che risulta

$$r' = \frac{p}{3\sqrt{3}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

143. Paragonando poi tra loro le formule (VIII), (XII) si ha pure la proporzione

$$r' : r = \operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C : \cot \frac{1}{2} A + \cot \frac{1}{2} B + \cot \frac{1}{2} C.$$

144. Essendo

$$\text{area AOB} = \frac{1}{2}\, cr,$$

$$\text{area AOC} = \frac{1}{2}\, br,$$

$$\text{area BOC} = \frac{1}{2}\, ar,$$

sommando queste tre equazioni, avremo l'area Σ del triangolo ABC espressa per una funzione del perimetro, e del raggio del circolo iscritto, cioè

$$\Sigma = pr'$$

donde è chiaro che Σ è uguale al semi-perimetro moltiplicato pel raggio del circolo iscritto.

145. Abbiamo veduto che $AD = OD \cot \frac{1}{2} A$; or si osservi che $2AD + 2a = 2p$, e che perciò $AD = p - a$; si sostituisca questo valore, e pongasi r' in luogo di OD; avremo

$$r' = (p - a) \operatorname{tang} \frac{1}{2} A \qquad \text{(XIII)}$$

e quindi

$$\Sigma = p(p - a) \operatorname{tang} \frac{1}{2} A \qquad \text{(XIV)}$$

ed

$$r'^2 = (\Sigma - ar') \operatorname{tang} \frac{1}{2} A \qquad \text{(XV)}$$

146. Dalla formula $\Sigma = pr'$ si ricava ancora (n.° 139, IV) il valore di r' espresso per una funzione dei soli lati.

$$r' = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \qquad \text{(XVI)}$$

e quindi la proporzione

$$r : r' = abc : 4(p-a)(p-b)(p-c). \qquad \text{(XVII)}$$

PROBLEMA IV.

147. Trovare l'area d'un parallelogrammo di cui si conoscono due lati adiacenti e l'angolo che comprendono.

Sieno i lati dati (fig. 50) $AB = b$, $AC = c$, e l'angolo $BAC = A$; dal punto C si abbassi la perpendicolare CF sopra AB avremo $CF = c \operatorname{sen} A$, ed in conseguenza, indicando con S la superficie richiesta,

$$S = bc \operatorname{sen} A \qquad \text{(XVIII)}$$

PROBLEMA V.

148. Determinare l'area d'un quadrilatero qualunque di cui si conoscono le due diagonali, e l'angolo θ che esse formano.

Siccome gli angoli AEB, AED (fig. 51) sono tra loro supplementari, è chiaro che $\operatorname{sen} AEB = \operatorname{sen} AED = \operatorname{sen} \theta$. Ciò posto determinamo l'area de' triangoli ABE, BCE, CDE DAE; valendosi della formula (11) n°. 79 sarà

$$ABE = \frac{1}{2} AE \,.\, BE \operatorname{sen} \theta,$$

$$BCE = \frac{1}{2} BE \,.\, CE \operatorname{sen} \theta,$$

$$CDE = \frac{1}{2} CE \,.\, DE \operatorname{sen} \theta,$$

$$DAE = \frac{1}{2} DE \,.\, AE \operatorname{sen} \theta;$$

sommando avremo

$$\text{area } ABCD = \frac{1}{2} (AE + CE)(BE + ED) \operatorname{sen} \theta;$$

così posta l'area medesima = T, ed indicate le due diagonali con d, d', avremo

$$T = \frac{1}{2} d d' \operatorname{sen} \theta. \qquad \text{(XVIII)}$$

Donde segue che l'area d'un quadrilatero è uguale alle metà del prodotto delle due diagonali moltiplicato pel seno dell'angolo compreso.

PROBLEMA VI.

149. Misurare l'area d'un poligono regolare di cui si conosce il numero de' lati, e la lunghezza d'uno di essi.

Essendo C (fig. 52) il centro del poligono, si conducano le rette CA, CB, ec. il poligono verrà diviso in tanti triangoli uguali ad ACB quanti sono i suoi lati. Ora

$$\text{area ACB} = AD \times CD = \overline{AD}^2 \operatorname{tang} CAD = \overline{AD}^2 \cot ACD;$$

dunque indicando con V l'area richiesta, con n il numero dei lati, con a uno di essi, e con π il quadrante, avremo

$$V = \frac{1}{4} n a^2 \cot \frac{2\pi}{n}. \qquad \text{(XIX)}$$

PROBLEMA VII.

150. Determinare l'area d'un settore di cui si conosce l'arco, e il raggio. Quindi quella del segmento per mezzo degli stessi dati.

L'area del circolo il cui raggio è r viene indicata da

$$S = \pi r^2; \qquad \text{(XX)}$$

or sia S′ l'area del settore misurato dall'arco dato, il quale si suppone che contenga n gradi; avremo

$$S : S' = 360^\circ : n$$

e quindi

$$S' = \frac{\pi n r^2}{360^\circ} \qquad \text{(xxi)}$$

151. Ora onde ottenere l'area S″ del segmento dovremo sottrarre l'area del triangolo formato dalla sua corda e dai due raggi che toccano le sue estremità, da quella del settore; e poichè l'area di questo triangolo vien espressa per $\frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen} n$ (n.° 139, II), sarà

$$S'' = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\pi n}{360^\circ} - \operatorname{sen} n \right). \qquad \text{(xxii)}$$

PROBLEMA VIII.

152. Trovare due angoli x, y, i cui seni stieno nella ragione di $n : 1$, e le cui tangenti nella ragione di $m : 1$.

Le condizioni del problema danno

$$\operatorname{sen} x : \operatorname{sen} y :: n : 1$$

$$\operatorname{tang} x : \operatorname{tang} y :: m : 1;$$

ed esprimendo i seni per le tangenti (n.° 65, VIII) sarà

$$\frac{\operatorname{tang} x}{\sqrt{(1 + \operatorname{tang}^2 x)}} : \frac{\operatorname{tang} y}{\sqrt{(1 + \operatorname{tang}^2 y)}} :: n : 1,$$

e quindi

$$n\sqrt{(1 + \operatorname{tang}^2 x)} : \sqrt{\left(1 + \frac{\operatorname{tang}^2 x}{m^2}\right)} :: m : 1,$$

ovvero

$$n^2 (1 + \operatorname{tang}^2 x) : 1 + \frac{\operatorname{tang}^2 x}{m^2} :: m^2 : 1;$$

di qui

$$\text{tang}\, x = \sqrt{\left[\frac{(m+n)(m-n)}{(n+1)(n-1)}\right]}$$

$$\text{tang}\, y = \frac{1}{m}\sqrt{\left[\frac{(m+n)(m-n)}{(n+1)(n-1)}\right]}$$

TEOREMA I.

153. In un quadrilatero qualunque la somma de' quadrati de' lati è uguale alla somma de' quadrati delle diagonali, più il quadruplo del quadrato della retta che unisce i punti di mezzo delle diagonali medesime.

Questo bellissimo teorema di Leonardo Eulero dimostrasi agevolmente col soccorso della trigonometria nel seguente modo. Sieno F e G, (fig. 51) i punti di mezzo delle diagonali; pongasi

$$AC = 2m,\ BD = 2n,\ FE = \alpha,\ EG = \beta,$$

$$AB = a,\ BC = b,\ CD = c,\ DA = d;$$

avremo

$$a^2 = (m-\beta)^2 + (n-\alpha)^2 + 2(m-\beta)(n-\alpha)\cos BEC$$

$$b^2 = (m+\beta)^2 + (n-\alpha)^2 - 2(m+\beta)(n-\alpha)\cos BEC$$

$$c^2 = (m+\beta)^2 + (n+\alpha)^2 + 2(m+\beta)(n+\alpha)\cos BEC$$

$$d^2 = (m-\beta)^2 + (n+\alpha)^2 - 2(m-\beta)(n+\alpha)\cos BEC$$

e sommando

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4(m^2 + n^2 + \beta^2 + \alpha^2 + 2\beta\alpha\cos BEC)$$

Ora, essendo

$$\overline{FG}^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta\alpha\cos BEC,$$

$$4m^2 = \overline{AC}^2,\ 4n^2 = \overline{BD}^2,$$

sarà finalmente

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \overline{Ac}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{FG}^2.$$

TEOREMA II.

154. In un poligono qualunque un lato è uguale alla somma di tutti gli altri respettivamente moltiplicati pei coseni degli angoli che essi formano col primo.

Converremo d'indicare i lati AB, BC, CD, DA del poligono (fig. 53) colle lettere a, b, c, d; e gli angoli colle due medesime lettere con cui s'indicano respettivamente i loro lati, poste fra parentesi; così l'angolo DAB verrà indicato con (a, d), l'angolo ABC verrà indicato con (a, b) ec.

Dimostriamo l'enunciato teorema relativamente al lato AB del quadrilatero ABCD. Abbassando le perpendicolari DD′, CC′, abbiamo

$$AB = AD' + D'C' + C'B,$$

$$AD' = AD \cos DAB,$$

$$D'C' = DG = DC \cos CDG = DC \cos CMB,$$

$$C'B = CB \cos ABC;$$

ovvero

$$AD' = d \cos(a, d),\ D'C' = c \cos(a, c),\ C'B = b \cos(a, b)$$

dunque

$$a = b \cos(a, b) + c \cos(a, c) + d \cos(a, d). \qquad \text{(XXIII)}$$

Questo teorema si può dimostrare nella medesima guisa sopra altro poligono qualunque. Nel pentageno ABCDE, (fig. 54), dove

$$AB = AE' + E'D' + D'C' + C'B$$

avremo

$$a = b\cos(a,b) + c\cos(a,c) + d\cos(a,d) + e\cos(a,e) \quad \text{(XXIV)}$$

155. Osservisi che nel quadrilatero ABCD (fig. 53) si ha

$$CC' = CG + GC' = CG + DD'$$

perlochè

$$b\,\text{sen}(a,b) = c\,\text{sen}(a,c) + d\,\text{sen}(a,d). \quad \text{(XXV)}$$

Parimente nel pentagono ABCDE (fig. 54) si ha

$$CC' = CG + GH + HC' = CG + DF + EE';$$

donde viene

$$b\,\text{sen}(a,b) = c\,\text{sen}(a,c) + d\,\text{sen}(a,d) + e\,\text{sen}(a,e). \quad \text{(XXVI)}$$

E perciò esprimendo i lati a, b, c ec. d' un poligono qualunque coi numeri ordinali 1.° 2.° 3.° ec. potremo stabilire che il secondo lato moltiplicato pel seno dell' angolo che esso fa col primo è uguale alla somma del terzo, quarto, ec. respettivamente moltiplicati pei seni degli angoli che essi fanno col primo lato medesimo.

156. Agli angoli (a,b), (a,c), (a,d) potremo sostituire i loro valori espressi per gli angoli stessi del quadrilatero, poichè

$$(a,b) = B, (a,c) = CMB = -[180° - (A+D)], (a,d) = A,$$

cosicchè le formule (XXIII), (XXV) potranno cambiarsi nelle seguenti

$$a = b\cos B - c\cos(A+D) + d\cos A \quad \text{(XXVII)}$$

$$b\,\text{sen}\,B = d\,\text{sen}\,A - c\,\text{sen}(A+D) \quad \text{(XXVIII)}$$

157. Parimente agli angoli (a,b) (a,c) (a,d), (a,e) potremo sostituire i loro valori espressi per gli angoli del pentagono, poichè (fig. 54)

$$(a,b) = B, (a,c) = 180° - (B+C),$$

$$(a,d) = -[180° - (A+E)], (a,e) = A;$$

cosicchè avremo dalle formule (XXIV) e (XXVI)

$$a = b\cos B - c\cos(B+C) - d\cos(A+E) + e\cos A, \quad \text{(XXIX)}$$

$$b\,\text{sen}\,B = c\,\text{sen}(B+C) - d\,\text{sen}(A+E) + e\,\text{sen}\,A. \quad \text{(XXX)}$$

TEOREMA III.

158. In ogni poligono la somma de' lati moltiplicati respettivamente pei coseni degli angoli che essi formano con una retta condotta a piacere sul piano di questo poligono è uguale a zero.

Sia AM (fig. 55) la retta alla quale si riferiscono tutti i lati del poligono ABCD; sarà (n.° 154)

$$AM = b\cos(b, AM) + c\cos(c, AM) + d\cos(d, AM);$$

ma il triangolo ABM ci somministra

$$AM = a\cos BAM = -a\cos BAM'$$

dunqne

$$a\cos BAM' + b\cos(b, AM) +$$
$$c\cos(c, AM) + d\cos(d, AM) = 0$$

l'angolo BAM' dobbiamo intendere che sia quello di a con AM; donde segue che nell' enunciato del teorema v' ha la condizione che gli angoli dei lati colla retta indefinita AM, sieno quelli che si ottengono presentando ad AM i lati stessi dalla parte della superficie del poligono.

TEOREMA IV.

159. In ogni poligono il quadrato d' un lato qualunque è uguale alla somma de' quadrati di tutti gli altri lati meno due volte i prodotti di questi presi due a due nel coseno dell' angolo che comprendono.

Dal quadrilatero ABCD (fig. 53) avremo (n.° 154)

$$a = b\cos(a,b) + c\cos(a,c) + d\cos(a,d)$$

$$b = a\cos(a,b) + c\cos(b,c) + d\cos(b,d)$$

$$c = a\cos(a,c) + b\cos(c,b) + d\cos(c,d)$$

$$d = a\cos(a,d) + b\cos(b,d) + c\cos(c,d);$$

moltiplicando la prima di queste equazioni per a, la seconda per b, la terza per c, la quarta per d; quindi sottraendo dalla prima la somma delle altre tre, sarà

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2[bc\cos(b,c) + bd\cos(b,d) + cd\cos(c,d)] \qquad \text{(XXXI)}$$

Dal pentagono ABCDE (fig. 54) avremo pure

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - 2[(bc\cos(b,c) + bd\cos(b,d) + be\cos(b,e) + cd\cos(c,d) + ce\cos(c,e) + de\cos(d,e)]; \qquad \text{(XXXII)}$$

e così pei poligoni d'un maggior numero di lati. Pei triangoli avremo pure

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(b,c)$$

come d'altra parte sappiamo; questa proprietà non è dunque che un caso particolare del generale teorema che abbiamo dimostrato.

160. Osservando che

$$(b,c) = C,\ (d,b) = -[180^\circ - (C+D)],\ (c,d) = D,$$

la formula (XXXI) si cambierà in

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2[bc\cos C - db\cos(C+D) + cd\cos D]. \qquad \text{(XXXIII)}$$

Parimente osservando che

$$(b,c)=C,(b,d)=-[200^\circ-(C+D)],$$
$$(b,e)=-[180^\circ-(A+B)],(c,d)=D,$$
$$(c,e)=-[180^\circ-(D+E)],(d,e)=E,$$

la formula (XXXII) darà

$$a^2=b^2+c^2+d^2+e^2-2[bc\cos C-bd\cos(C+D)$$
$$-be\cos(A+B)+cd\cos D-ce\cos(D+E)+de\cos E];$$

oppure, ove si rifletta che $A+B=540^\circ-(C+D+E)$,

$$a^2=b^2+c^2+d^2+e^2-2[bc\cos C-bd\cos(C+D)$$
$$+be\cos(C+D+E)+cd\cos D$$
$$-ce\cos(D+E)+de\cos E]; \qquad \text{(XXXIV)}$$

in questo modo le formule (XXXIII), (XXXIV) divengono indipendenti dagli angoli A, B adiacenti al lato a.

161. La formula (XXXI) riferita successivamente a tutti i lati del quadrilatero dà luogo al seguente sistema d'equazioni

$$a^2=b^2+c^2+d^2-2[bc\cos(b,c)$$
$$+bd\cos(b,d)+cd\cos(c,d)]$$
$$b^2=a^2+c^2+d^2-2[ac\cos(a,c)$$
$$+ad\cos(a,d)+cd\cos(c,d)]$$
$$c^2=a^2+b^2+d^2-2[ab\cos(a,b)$$
$$+ad\cos(a,d)+bd\cos(b,d)]$$
$$d^2=a^2+b^2+c^2-2[ab\cos(a,b)$$
$$+ac\cos(a,c)+bc\cos(b,c)];$$

le quali sommate danno

$$a^2+b^2+c^2+d^2=2[ab\cos(a,b)+ac\cos(a,c)+ad\cos(a,d)$$
$$+bc\cos(b,c)+bd\cos(b,d)+cd\cos(c,d)]$$

donde segue che la somma de' quadrati fatti sopra i lati d' un poligono qualunque è il doppio della somma de' prodotti di essi lati presi due a due nel coseno dell' angolo che comprendono.

162. E perciò il valore della somma de' prodotti che si possono formare coi lati d' un poligono presi due a due e quindi respettivamente moltiplicati pel coseno dell' angolo da questi lati compreso è la stessa per tutti que' poligoni che sono equilateri tra loro. E conseguentemente, se un poligono verrà trasformato in modo che la grandezza de' suoi lati resti fissa, la somma de' prodotti di tutti questi lati moltiplicati due a due e pel coseno dell' angolo compreso rimarrà costante.

PROBLEMA IX.

163. Determinare la superficie d' un poligono di cui si conoscono i lati, e gli angoli.

Supponiamo che si tratti del quadrilatero ABCD; (fig. 53); T ne indichi l' area; avremo primieramente

$$T = ANB - DNC,$$

ovvero (n.° 139, II)

$$T = \frac{1}{2}(b + CN)(d + DN)\,\text{sen}\,CND - \frac{1}{2}CN.DN\,\text{sen}\,CND$$

$$T = \frac{1}{2}(bd\,\text{sen}\,CND + b.DN\,\text{sen}\,CND + d.CN\,\text{sen}\,CND);$$

ma

$$DN = \frac{c\,\text{sen}\,NCD}{\text{sen}\,CND};\quad CN = \frac{c\,\text{sen}\,CDN}{\text{sen}\,CND};$$

$$CND = (b,d),\ NCD = 180^\circ - (b,c),\ CDN = 180^\circ - (c,d);$$

danque

$$T = \frac{1}{2}[bc\,\text{sen}(b,c) + bd\,\text{sen}(b,d) + cd\,\text{sen}(c,d)] \quad \text{(xxxv)}$$

In questa formula non entra il lato a; potremmo partire da

$$T = BMC - AMD,$$

ed allora verrebbe escluso il lato b, e si otterrebbe,

$$T = \frac{1}{2}[ac\,\text{sen}(a,c) + ad\,\text{sen}(a,d) + cd\,\text{sen}(c,d)].$$

Ma più agevolmente si giunge a questi risultamenti decomponendo il quadrilatero in due triangoli con una delle sue diagonali: tirando A C avremo

$$T = ABC + ADC$$

ovvero

$$T = \frac{1}{2}[ab\,\text{sen}(a,b) + cd\,\text{sen}(c,d)];$$

e ponendo in luogo di $b\,\text{sen}(a,b)$ il suo valore somministratoci dalla (xxv) (n.° 155) immediatamente si ha

$$T = \frac{1}{2}[ac\,\text{sen}(a,c) + ad\,\text{sen}(a,d) + cd\,\text{sen}(c,d)].$$

Dovendo determinare la superficie del pentagono ci varremo del medesimo metodo; tireremo la diagonale A C, e sarà

$$T' = ABC + AEDC;$$

ovvero

$$T' = \frac{1}{2}[ab\,\text{sen}(a,b) + cd\,\text{sen}(c,d) + ce\,\text{sen}(c,e) + de\,\text{sen}(d,e)]$$

e quindi (n.° 155. xxvi)

$$T' = \frac{1}{2}[ac\,\text{sen}(a,c) + ad\,\text{sen}(a,d) + ae\,\text{sen}(a,e)$$
$$+ cd\,\text{sen}(c,d) + ce\,\text{sen}(c,e) + de\,\text{sen}(d,e)];$$

in questa espressione resta escluso il lato b; volendo escludere il lato a, si avrebbe

$$T' = \frac{1}{2}[bc\,\text{sen}\,(b,c) + bd\,\text{sen}\,(b,d) + be\,\text{sen}\,(b,e) + cd\,\text{sen}\,(c,d) + ce\,\text{sen}\,(c,e) + de\,\text{sen}\,(d,e)] \quad \text{(XXXVI)}$$

laonde possiamo stabilire che la superficie d'un poligono di n lati è uguale alla semisomma da' prodotti che si posson formare con $n-1$ de' lati medesimi moltiplicati due a due, e pel seno dell'angolo che comprendono.

164. Introducendo poi nelle suddette formule (XXXV), (XXXVI) gli angoli del poligono, ad esse corrisponderanno le seguenti

$$T = \frac{1}{2}[bc\,\text{sen}\,C - bd\,\text{sen}\,(C+D) + cd\,\text{sen}\,D] \quad \text{(XXXVII)}$$

$$T' = \frac{1}{2}[bc\,\text{sen}\,C - bd\,\text{sen}(C+D) + be\,\text{sen}\,(C+D+E) + cd\,\text{sen}\,D - ce\,\text{sen}\,(D+E) + de\,\text{sen}\,E]. \quad \text{(XXXVIII)}$$

In tutte queste formule relative ai poligoni i segni che assumono nelle diverse grandezze degli angoli le rette trigonometriche, renderanno sempre le formule stesse concordi ai cambiamenti cui può andar soggetta la figura dalla quale sono state dedotte.

PROBLEMA X.

165. Determinare la superficie d'un poligono di cui si conosce un lato e gli angoli che formano con lo stesso lato le varie rette condotte dalle sue estremità a tutti i vertici del poligono.

Il cognito lato sia $AB = a$ (fig. 56); gli angoli che formano con AB le rette AE, AD, AC condotte dall'estremità A ai vertici del poligono sieno α, β, γ; e gli angoli che formano con AB le rette BE, BD, BC condotte dall'estremità B

ai vertici stessi sieno α', β', γ'. Determineremo le area de' triangoli EAD, DAC, CAB; quindi dalla loro somma avremo la superficie del pentagono ABCDE.

L' area di EAD è indicata da $\frac{1}{2}$ AE . AD sen $(\alpha-\beta)$;

ora

$$\frac{AE}{AB}=\frac{\text{sen}\,ABE}{\text{sen}\,AEB},\ \frac{AD}{AB}=\frac{\text{sen}\,ABD}{\text{sen}\,ADB};$$

ovvero

$$AE=\frac{a\,\text{sen}\,\alpha'}{\text{sen}\,(\alpha+\alpha')},\ AD=\frac{a\,\text{sen}\,\beta'}{\text{sen}\,(\beta+\beta')};$$

dunque

$$\text{area}\,EAD=\frac{a^2\,\text{sen}\,\alpha'\,\text{sen}\,\beta'\,\text{sen}\,(\alpha-\beta)}{2\,\text{sen}\,(\alpha+\alpha')\,\text{sen}\,(\beta+\beta')};$$

da questa formula si deduce agevolmente l'espressione dell' area di DAC, ed essa è

$$\text{area}\,DAC=\frac{a^2\,\text{sen}\,\beta'\,\text{sen}\,\gamma'\,\text{sen}\,(\beta-\gamma)}{2\,\text{sen}\,(\beta+\beta')\,\text{sen}\,(\gamma+\gamma')};$$

finalmente (n.° 139, 1)

$$\text{area}\,CAB=\frac{a^2\,\text{sen}\,\gamma\,\text{sen}\,\gamma'}{2\,\text{sen}\,(\gamma+\gamma')}.$$

In conseguenza avremo

$$T=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,(\alpha-\beta)}{\text{sen}\,(\alpha+\alpha')\,\text{sen}\,(\beta+\beta')}+\frac{\text{sen}\,\beta'\,\text{sen}\,\gamma'\,\text{sen}\,(\beta-\gamma)}{\text{sen}\,(\beta+\beta')\,\text{sen}\,(\gamma+\gamma')}\right.$$
$$\left.+\frac{\text{sen}\,\gamma\,\text{sen}\,\gamma'}{\text{sen}\,(\gamma+\gamma')}\right). \qquad \text{(XXXIX)}$$

Nello stesso modo potremmo determinare l' area d' un poligono d' un maggior numero di lati.

PROBLEMA XI.

166. Essendo dati d'un quadrilatero (fig. 53) tre lati b, c, d,

uno degli angoli compresi $(c,d)=D$, ed uno degli angoli adiacenti A, trovare il quarto lato a, e i due angoli B, C.

La risoluzione generale dei poligoni che costituisce l'oggetto della poligonometria, si effettua col mezzo dei teoremi che abbiamo dimostrati i quali danno a conoscere le proprietà de' poligoni, ovvero le relazioni de' loro lati colle rette trigonometriche de' loro angoli. Non volendo esporre della poligonometria che i principj su cui riposa, e qualche saggio d'applicazione de' medesimi, ci contenteremo d'aggiungere ai suddetti teoremi alcuni quesiti da cui rilevasi l'uso che di essi si può fare. Per una maggiore istruzione in questo ramo di matematica rimandiamo i nostri leggitori alla poligonometria di Lhuillier, a quella del Prof. Franchini, ed anche alla Geometria di posizione di Carnot. Passando frattanto alla risoluzione dell'enunciato problema richiameremo le formule (XXVII) e (XXVIII) n.° 156, dalla seconda delle quali si ha

$$\operatorname{sen} B = \frac{d \operatorname{sen} A - c \operatorname{sen}(A+D)}{b};$$

e quindi

$$C = 360^\circ - (A+B+D);$$

e dalla prima

$$a = b \cos B - c \cos(A+D) + d \cos A.$$

PROBLEMA XII.

167. Essendo dati d'un quadrilero (fig. 53) tre lati a, c, d e gli angoli compresi $(a, d)=A$, $(c, d)=D$, trovare gli altri due angoli B, C, ed il quarto lato b.

Dalle due equazioni suddette (XXVII) e (XXVIII) si ricava.

$$b \cos B = a + c \cos (A + D) - d \cos A$$

$$b \operatorname{sen} B = d \operatorname{sen} A - c \operatorname{sen} (A + D);$$

Or dividendo la seconda per la prima, verrà

$$\operatorname{tang} B = \frac{d \operatorname{sen} A - c \operatorname{sen} (A + D)}{a + c \cos (A + D) - d \cos A};$$

quindi

$$C = 360^\circ - (A + B + D).$$

Finalmente essendo

$$b = a \cos (b, a) + d \cos (b, d) + c \cos (b, c),$$

poichè

$$(b, a) = B, (b, d) = -[180^\circ - (C + D)], (b, c) = C$$

avremo

$$b = a \cos B - d \cos (C + D) + c \cos C.$$

PROBLEMA XIII.

168. Essendo dati d'un pentagono (fig. 54) quattro lati, b, c, d, e, e gli angoli che essi comprendono $(b, c) = C$, $(c, d) = D$, $(d, e) = E$, trovare gli altri due angoli A, B, ed il quarto lato a.

La formula (xxx), osservando che

$$(B + C) = 540^\circ - (A + D + E),$$

e che

$$B = 540^\circ - (A + C + D + E)$$

ci dà

$$b \operatorname{sen} (A + C + D + E) = c \operatorname{sen} (A + E + D)$$
$$- d \operatorname{sen} (A + E) + e \operatorname{sen} A;$$

quindi, sviluppando i fattori ne'quali A è contenuto, avremo

$$b \operatorname{sen} A \cos (C + D + E) + b \cos A \operatorname{sen} (C + D + E) =$$

$$c \operatorname{sen} A \cos(E+D) + c \cos A \operatorname{sen}(E+D) - d \operatorname{sen} A \cos E$$
$$- d \operatorname{sen} E \cos A + e \operatorname{sen} A;$$

e ponendo in luogo di cos A, il suo valore $\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 A}$ avremo una equazione da cui sarà facile ricavare il valore di A. Trovato A, si determina B agevolmente, e quindi si determina a valendosi della formula (XXIX) (n.° 157).

TEOREMA V.

169. In ogni quadrilatero iscritto nel circolo il prodotto delle due diagonali è uguale alla somma dei prodotti dei lati opposti; ed il rapporto delle due diagonali è uguale al rapporto delle somme dei rettangoli dei lati adiacenti alle loro estremità.

1.° Il quadrilatero sia ABCD (fig. 57), ed i suoi lati AB, BC, CD, DA vengano respettivamente indicati con le lettere a, b, c, d; le diagonali BD, AC si rappresentino poi con h, h'. Conducasi DF in guisa che l'angolo FDC sia uguale all'angolo (h, c); è manifesto che l'angolo ADF risulterà uguale all'angolo (h, c); come pure l'angolo AFD uguale a (c, b), e l'angolo DFC uguale ad (a, d). Ora

$$AF = \frac{d \operatorname{sen} ADF}{\operatorname{sen} AFD}, \quad CF = \frac{c \operatorname{sen} FDC}{\operatorname{sen} DFC},$$

ma abbiamo

$$\frac{\operatorname{sen} ADF}{\operatorname{sen} AFD} = \frac{\operatorname{sen}(h, c)}{\operatorname{sen}(c, b)} = \frac{b}{h},$$

$$\frac{\operatorname{sen} FDC}{\operatorname{sen} DFC} = \frac{\operatorname{sen}(h, d)}{\operatorname{sen}(a, d)} = \frac{a}{h};$$

perciò

$$AF = \frac{bd}{h}, \quad CF = \frac{ac}{h}, \quad \text{ed } AF + CF = h' = \frac{bd + ac}{h};$$

dunque

$$hh' = ac + bd. \qquad \text{(XXXIX)}$$

2.° La superficie del quadrilatero ABCD è uguale alla somma de' due triangoli ABC, ADC, ed è pure uguale alla somma degli altri due ABD, BCD; laonde si può stabilire

$$ABC + ADC = ABD + BCD;$$

indicando con r il raggio del circolo, avremo in conseguenza (n.° 141, XI)

$$\frac{abh'}{4r} + \frac{cdh'}{4r} = \frac{adh}{4r} + \frac{bch}{4r}$$

ovvero

$$\frac{h}{h'} = \frac{ab + bc}{ad + bc}. \qquad \text{(XL)}$$

PROBLEMA XIII.

170. Essendo dati i quattro lati d'un quadrilatero iscritto trovare le diagonali, il raggio del circolo, la superficie del quadrilatero, ed i suoi angoli.

1.° Ci varremo primieramente delle equazioni (XXXIX) e (XL), dalle quali eliminando h, h' si ha

$$h = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}} \qquad \text{(XLI)}$$

$$h' = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}} \qquad \text{(XLII)}$$

2.° Osservando poi che il raggio del circolo circoscritto al quadrilatero è quello stesso del circolo circoscritto al triangolo ABC i cui lati sono a, b, h', avremo (n.° 141, IX)

$$r = \frac{abh'}{\sqrt{(2a^2b^2 + 2a^2h'^2 + 2b^2h'^2 - (a^4 + b^4 + h'^4)}},$$

e ponendo in vece di h' il suo valore (XLII), e facendo le opportune riduzioni, risulterà

$$r=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)(ab+cd)}{(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a)}}$$

Finalmente posto il perimetro $a+b+c+d=2p$, otterremo

$$r=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)(ab+cd)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}} \qquad \text{(XLIII)}$$

3.° Indicando la superficie del quadrilatero con Z, si ha

$$Z=ABC+ADC;$$

ma (n.° 140, XI)

$$ABC=\frac{abh'}{4r}, ADC=\frac{cdh'}{4r};$$

dunque

$$Z=\frac{(ab+cd)h'}{4r},$$

$$Z=\frac{1}{4r}\sqrt{[(ac+bd)(ad+bc)(ab+cd)]},$$

$$Z=\sqrt{[(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)]}. \qquad \text{(XLIV)}$$

4.° In ultimo luogo onde ottenere uno qualunque degli angoli, per esempio l'angolo B, ricaveremo dal triangolo ABC l'equazione

$$h'^2=a^2+b^2-2ab\cos B;$$

dalla quale sostituendo il valore di h' avremo

$$\cos B=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2ab+2cd}; \qquad \text{(XLV)}$$

e poichè (n.° 106, XLVIII)

$$\tang^2\frac{1}{2}B=\frac{1-\cos B}{1+\cos B},$$

avremo pure

$$\tang \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(c+d)^2-(a-b)^2}{(a+b)^2-(c-d)^2}}$$

$$\tang \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(a+c+d-b)(b+c+d-a)}{(a+b+c-d)(a+b+d-c)}}$$

e finalmente

$$\tang \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}} \qquad \text{(XLVI)}$$

PARTE TERZA

ELEMENTI DI TRIGONOMETRIA SFERICA

CAPITOLO I.

Principali proprietà dei triangoli sferici.

171. La *sfera* è un solido che si può supporre generato dalla rivoluzione d' un semicircolo intorno al proprio diametro. La geometria dimostra che la sezione della sfera fatta da un piano è un circolo; or quando il piano secante passa pel centro della sfera, la sezione, poichè in questo caso è la più grande possibile, chiamasi *circolo massimo*.

Dicesi poi *polo* d' un circolo della sfera, un punto della sua superficie ugualmente lontano da tutti i punti della circonferenza di questo circolo. È facile dimostrare che ogni circolo della sfera ha due poli, i quali sono le estremità d' un diametro della sfera condotto perpendicolarmente al piano di esso circolo.

Due circoli massimi d' una medesima sfera ne dividono la superficie in quattro parti denominate *fusi*, ciascuna delle quali è compresa tra due semi-circoli; e tre circoli massimi la dividono in sei fusi, quando però questi circoli si tagliano secondo il medesimo diametro; chè se i tre circoli non hanno l' intersezione comune, allora essi dividono la

superficie sferica in otto parti, che sono otto triangoli detti *triangoli sferici*, i cui lati sono archi di circolo massimo. Perlochè stando a questa generazione potremo stabilire che *un triangolo sferico è una porzione di superficie sferica compresa tra tre archi di circolo massimo*.

Si possono concepire descritti su la superficie sferica triangoli sferici formati dagli archi de' circoli minori, ma di questi non è d'uopo tener proposito.

172. Sia ABC (fig. 58) un triangolo sferico descritto su la sfera il cui centro è in O; AB, BC, AC, poichè sono archi di circolo massimo il centro de' quali è in O, misureranno gli angoli AOB, AOC, BOC. Donde si vede che la somma dei lati d'un triangolo sferico sarà la misura della somma degli angoli piani che costituiscono l'angolo triedro O. Or la somma degli angoli costituenti un angolo triedro è sempre minore di quattro retti, dunque *la somma dei tre lati d'un triangolo sferico è minore della circonferenza d'un circolo grande*.

173. In quanto agli angoli del triangolo sferico è da avvertire che essi sono identici agli angoli dei piani in cui si trovano i lati loro. Così l'angolo A è uguale all'angolo diedro formato dai piani CAO, BAO in cui si trovano i lati CA, BA dell'angolo A; e siccome l'angolo di due piani s'intende che sia quello delle due perpendicolari condotte nei medesimi piani sopra un punto della comune loro intersezione, perciò conducendo pel vertice A le perpendicolari AC′, AB′ ad AO la prima nel piano CAO, l'altra nel piano BAO, ovvero conducendo le tangenti AC′, AB′ agli archi AC, AB, l'angolo B′AC′ sarà per noi identico coll'angolo sferico A; la qual cosa concorda colla geometria analitica, dove vuolsi che l'angolo di due curve sia quello che

formano le loro tangenti condotte al punto d' intersecazione.

174. Le due perpendicolari che misurano l' angolo diedro OBCA possono anche condursi pel centro O della sfera: sieno esse OP ed OQ. L'angolo POQ sarà uguale all' angolo B'AC' delle due tangenti, ma l'angolo POQ è misurato dall' arco di circolo massimo PQ descritto dal punto A come polo alla distanza d' un quadrante, perciò concludesi che *l' angolo sferico è misurato dall' arco di circolo massimo compreso fra i suoi lati, e descritto dal suo vertice come polo alla distanza d' un quadrante*.

175. Posto ciò se dai vertici A, B, C (fig. 59) del triangolo sferico ABC alla distanza di un quadrante si descrivono gli archi B'C', A'C', A'B' e si prolungano i lati del triangolo sino all' incontro di questi archi, FG sarà la misura dell' angolo A, DH lo sarà di B, ed MN lo sarà di C. Avvertasi che siccome i vertici A, B, C del triangolo ABC sono i poli dei lati B'C', A'C', A'B', del triangolo A'B'C', così i vertici A', B', C' sono distanti d' un quadrante da BC, AC, AB, cioè sono i poli dei lati del triangolo ABC: dimanierachè a cagione di questa corrispondenza i triangoli ABC, A'B'C' vengono chiamati *triangoli polari*.

Ora poichè

$$FG + B'C' = 180^\circ$$

$$HD + A'C' = 180^\circ$$

$$MN + A'B' = 180^\circ$$

possiamo concludere, che gli angoli del triangolo sferico ABC sono misurati dai supplementi dei lati del suo triangolo polare A'B'C': oltre a ciò i lati del triangolo ABC sono la misura dei supplementi degli angoli A', B', C' del

triangolo polare: infatti A′, B′, C′ hanno per misura gli archi MH, NG, FD, ed è facile vedere che

$$MH + BC = 180^\circ$$

$$NG + AC = 180^\circ$$

$$FD + AB = 180^\circ.$$

E però i triangoli ABC, A′B′C′ si chiamano talvolta *triangoli supplementari*.

176. Quindi sarà facile dimostrare che la somma degli angoli d'un triangolo sferico è minore di sei e maggiore di due angoli retti. Perocchè essendo

$$A = 180^\circ - B'C'$$

$$B = 180^\circ - A'C'$$

$$C = 180^\circ - A'B'$$

si vede che

$$A + B + C = 540^\circ - (B'C' + A'C' + A'B');$$

ma la somma $B'C' + A'C' + A'B'$ dei tre lati del triangolo sferico è minore di 360° (n.° 173), e d'altra parte supera sempre lo zero, perciò la quantità $A + B + C$ trovasi costantemente compresa tra due e sei angoli retti.

CAPITOLO II.

Principio generale per la risoluzione de' triangoli sferici.

177. L'oggetto della trigonometria sferica non differisce da quello della trigonometria rettilinea che per la nara de' triangoli che si prendono in considerazione. Di fatto come la rettilinea specula sopra i triangoli rettilinei, così specula la sferica sopra i triangoli sferici, e conseguen-

temente essa si propone di assegnare i metodi opportuni alla determinazione o risoluzione d'un triangolo sferico, di cui sono dati gli elementi necessarj, cioè quelli che bastano ad escludere l'ambiguità delle soluzioni. Questi metodi però differiscono essenzialmente da quelli della trigonometria rettilinea; imperocchè le equazioni che conviene determinare per la risoluzione de' triangoli rettilinei esprimono le relazioni de' lati colle rette trigonometriche degli angoli, laddove le equazioni per la risoluzione dei triangoli sferici conviene che esprimano le relazioni delle rette trigonometriche degli angoli, con le rette trigonometriche dei lati.

178. Affine di vedere quali e quanti elementi del triangolo è necessario che sieno dati per determinarlo, conviene osservare, che il triangolo sferico ABC sarebbe determinato quando lo fosse l'angolo triedro OABC; ovvero quando si conoscessero gli angoli piani che lo costituiscono, e le loro scambievoli inclinazioni. Sappiamo però dalla geometria che di questi sei elementi tre bastano a caratterizzare un angolo triedro; dunque per la risoluzione dei triangoli sferici dovremo cercare delle equazioni che comprendano quattro elementi almeno, affinchè essendone dati tre si possa colla risoluzione delle equazioni medesime trovare il quarto.

Or tutte le combinazioni differenti che si possono fare dei sei elementi suddetti presi quattro a quattro o due a due sono $\frac{6.5}{2}$ cioè 15 (*); ma esse si riducono a quattro es-

(*) Diciamo quattro a quattro o due a due, perchè l'algebra dimostra essere il numero delle combinazioni di m cose prese n ad n, uguale a quelle di m cose prese $m-n$ ad $m-n$.

senzialmente diverse pel nostro oggetto. La prima è fra tre lati e un angolo; questa comprende i tre cambiamenti

$$a, b, c, A \qquad a, b, c, B \qquad a, b, c, C.$$

La seconda è fra due lati e due angoli opposti; questa ne abbraccia tre, cioè

$$a, b, A, B \qquad a, c, A, C \qquad b, c, B, C.$$

La terza è fra due lati e due angoli di cui uno opposto e l'altro adiacente al medesimo lato dato, la quale ne comprende sei, cioè

$$a, b, A, C \qquad a, c, A, B \qquad b, c, A, B$$
$$a, b, B, C \qquad a, c, B, C \qquad b, c, A, C$$

La quarta finalmente è fra tre angoli e un lato; la quale ne abbraccia tre, cioè

$$A, B, C, a \qquad A, B, C, b \qquad A, B, C, c.$$

Passeremo intanto a determinare le formule a questi quattro casi relative.

179. Supponiamo che ABC (fig. 58) sia un triangolo sferico descritto sulla superficie della sfera, il cui raggio è uguale a quello delle tavole, e conseguentemente uguale all'unità. Prolungando i raggi OB, OC sino all'incontro delle tangenti ne' punti B′ e C′, e conducendo la retta B′C′, dai triangoli AB′C′, OB′C′ avremo

$$\overline{B'C'}^2 = \overline{AB'}^2 + \overline{AC'}^2 - 2\,AB'.AC'.\cos C'AB',$$

$$\overline{B'C'}^2 = \overline{OB'}^2 + \overline{OC'}^2 - 2\,OB'.OC'.\cos C'OB';$$

ed osservando che

$$AB' = \operatorname{tang} AB,\ AC' = \operatorname{tang} AC,$$
$$OB' = \sec AB,\ OC' = \sec AC,$$

e convenendo d'indicare i lati con le medesime lettere che sono agli angoli opposti, ma prese nell' alfabeto minuscolo, sarà

$$\overline{B'C'}^2 = \tang^2 b + \tang^2 c - 2 \tang b \tang c \cos A,$$

$$\overline{B'C'}^2 = \sec^2 b + \sec^2 c - 2 \sec b \sec c \cos a;$$

e quindi, sottraendo dalla seconda la prima,

$$\sec^2 b - \tang^2 b + \sec^2 c - \tang^2 c - 2 \sec b \sec c \cos a$$
$$+ 2 \tang b \tang c \cos A = 0;$$

ora ricorrendo alle formule (II), (III), (VI) (n.° 64 e 65) potremo facilmente trasformare questa equazione nella seguente,

$$1 - \frac{\cos a}{\cos b \cos c} + \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A}{\cos b \cos c} = 0$$

da cui si ha

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A.$$

E poichè la stessa costruzione che abbiamo fatta rispetto all'angolo A, può ripetersi sopra B e sopra C, è manifesto che col semplice cambiamento di A, a, in B, b, e viceversa, ovvero di A, a, in C, c, e viceversa, dall' equazione precedente avremo altre due equazioni ad essa consimili, e conseguentemente questo sistema di equazioni

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A, \qquad (I)$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos B, \qquad (II)$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C; \qquad (III)$$

donde risulta che *il coseno d' un lato è uguale al prodotto de' coseni degli altri due lati più il prodotto dei seni di questi medesimi lati nel coseno dell' angolo che comprendono.*

Questo teorema può considerarsi come il principio fondamentale di tutta la trigonometria sferica, poichè da esso

derivano, come vedremo, tutte le formule che servono alla risoluzione dei triangoli sferici. Intanto si osservi che avendo tre equazioni (I), (II), (III) fra le sei quantità a, b, c, A, B, C, quando di esse ne sieno date tre, agevol cosa debb' essere il determinare le altre col mezzo dell' eliminazione: ond' è che le equazioni suddette risolvono il problema generale della trigonometria sferica.

180. Nella trigonometria rettilinea i lati d' un triangolo stanno fra loro come i seni degli angoli opposti; vediamo se nella trigonometria sferica può aver luogo qualche teorema analogo a questo. Sappiamo che

$$\frac{\text{sen A}}{\text{sen } a} = \frac{\sqrt{(1 - \cos^2 \text{A})}}{\text{sen } a};$$

ora dalla prima delle equazioni precedenti (I) ricavasi

$$\cos \text{A} = \frac{\cos b \cos c - \cos a}{\text{sen } b \text{ sen } c};$$

laonde risulta

$$1 - \cos^2 \text{A} = 1 - \frac{\cos^2 b \cos^2 c + \cos^2 a - 2 \cos a \cos b \cos c}{\text{sen}^2 b \text{ sen}^2 c};$$

e poichè

$$\text{sen}^2 b \text{ sen}^2 c = (1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c)$$
$$= 1 - \cos^2 b - \cos^2 c + \cos^2 b \cos^2 c,$$

riducendo allo stesso denominatore e sostituendo si ha

$$1 - \cos^2 \text{A} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\text{sen}^2 b \text{ sen}^2 c};$$

ed in conseguenza

$$\frac{\text{sen A}}{\text{sen } a} = \frac{\sqrt{(1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c)}}{\text{sen } a \text{ sen } b \text{ sen } c} \quad \text{(M)}$$

Colla osservazione medesima potremmo trovare i valori di

$$\frac{\text{sen B}}{\text{sen } b}, \frac{\text{sen C}}{\text{sen } c}.$$

Ma riflettiamo, che potendosi dedurre il valore di cos B tratto dall' equazione (II) dal valore di cos A tratto dalla (I) cambiando a in b, e viceversa b in a, così potremo ottenere il valore del rapporto $\frac{\text{sen B}}{\text{ren } b}$, facendo le medesime sostituzioni nell' equazione (M); or poichè il secondo membro dell' equazione medesima è una funzione simmetrica di a, b, c, consegue che

$$\frac{\text{sen A}}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen B}}{\text{sen } b}.$$

Di qui per analogia abbiamo altre due equazioni, cosicchè risulta il seguente sistema

$$\frac{\text{sen A}}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen B}}{\text{sen } b}, \qquad \text{(IV)}$$

$$\frac{\text{sen A}}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen C}}{\text{sen } c}, \qquad \text{(V)}$$

$$\frac{\text{sen B}}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen C}}{\text{sen } c}; \qquad \text{(VI)}$$

secondo teorema dal quale si ricava che in *un triangolo sferico qualunque i seni dei lati stanno fra loro come i seni degli angoli opposti*.

181. Questo teorema si può dimostrare eziandio per mezzo d' una facile costruzione geometrica: sia ABC (fig. 60) il triangolo sferico descritto sulla superficie della sfera che ha il centro in S: dal vertice C si abbassi una perpendicolare CP sul piano opposto ASB, e dal piede P di essa perpendicolare si abbassino pure due perpendicolari PA′, PB′ su i lati AS, BS, e si conducano le rette CA′, CB′;

queste risulteranno perpendicolari ai lati medesimi; dimodochè gli angoli CA'P, CB'P dei triangoli CA'P, CB'P rettangoli ambedue in P, indicheranno il valore degli angoli sferici A e B. Ora dal primo di questi triangoli ricavasi

$$CP = CA' \operatorname{sen} CA'P,$$

e dal secondo

$$CP = CB' \operatorname{sen} CB'P;$$

ma

$$CA' = \operatorname{sen} b, \; CB' = \operatorname{sen} a,$$

dunque

$$\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B,$$

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b};$$

e mediante una costruzione analoga alla precedente potremmo ottenere nello stesso modo le suddivisate equazioni (v) e (vi).

182. La terza relazione che vogliamo determinare è quella tra due lati e due angoli di cui uno opposto, l'altro adiacente al medesimo lato dato: ma a ciò si giunge facilmente sostituendo nell'equazione (i) il valore di $\cos c$ dato dall'equazione (iii), e quello di $\operatorname{sen} c$ tratto dall'equazione (v); cioè

$$\operatorname{sen} c = \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A};$$

infatti il risultato comprenderà gli elementi a, b, A, C come si richiede. Or per la prima sostituzione otterremo

$$\cos a = \cos a \cos^2 b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos b \cos C + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A;$$

ma $\cos^2 b = 1 - \operatorname{sen}^2 b$, dunque sostituendo e trasportando i termini negativi nel primo membro, e dividendo per $\operatorname{sen} b$, sarà

$$\cos a \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \cos b \cos C + \operatorname{sen} c \cos A. \qquad (N)$$

Per la seconda sostituzione avremo poi

$$\cos a \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \cos b \cos C + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C \cot A;$$

e dividendo per $\operatorname{sen} a$

$$\cot a \operatorname{sen} b = \cos b \cos C + \operatorname{sen} C \cot A, \qquad (P)$$

ovvero

$$\cot A = \frac{\cot a \operatorname{sen} b - \cos b \cos C}{\operatorname{sen} C}; \qquad (\text{VII})$$

e di qui il terzo teorema, per cui *la cotangente d' un angolo è uguale alla cotangente del lato opposto nel seno d' un altro lato, meno il coseno di questo lato nel coseno dell' angolo compreso; la differenza divisa pel seno dell' angolo medesimo.*

Siccome si può prendere per secondo lato tanto b che c, segue che alla cotangente dell' angolo A corrispondono due espressioni; la prima è indicata dalla formula (VII), l' altra è

$$\cot A = \frac{\cot a \operatorname{sen} c - \cos c \cos B}{\operatorname{sen} B}; \qquad (\text{VIII})$$

questo teorema come desunto dalle equazioni generali del primo e del secondo sistema non può esser proprio del solo angolo A, cosicchè venendo esteso convenientemente agli angoli B e C darà luogo al terzo sistema seguente

$$\cot A = \frac{\cot a \operatorname{sen} b - \cos b \cos C}{\operatorname{sen} C}, \qquad (\text{VII})$$

$$\cot A = \frac{\cot a \operatorname{sen} c - \cos c \cos B}{\operatorname{sen} B}; \qquad (\text{VIII})$$

$$\cot B = \frac{\cot b \operatorname{sen} a - \cos a \cos C}{\operatorname{sen} C}, \qquad (\text{IX})$$

$$\cot B = \frac{\cot b \operatorname{sen} c - \cos c \cos A}{\operatorname{sen} A}; \qquad (x)$$

$$\cot C = \frac{\cot c \operatorname{sen} a - \cos a \cos B}{\operatorname{sen} B}, \qquad (xi)$$

$$\cot C = \frac{\cot c \operatorname{sen} b - \cos b \cos A}{\operatorname{sen} A}. \qquad (xii)$$

183. Risolvendo poi l'equazione (P) non già rapporto a cot A come abbiamo fatto, ma piuttosto rapporto a cot a, avremo

$$\cot a = \frac{\cot A \operatorname{sen} C + \cos C \cos b}{\operatorname{sen} b} \qquad (xiii)$$

quindi è che il terzo teorema potrebbe pure enunciarsi nella seguente guisa: *la cotangente d'un lato è uguale alla cotangente dell'angolo opposto nel seno d'un altro angolo più il coseno di questo angolo nel coseno del lato comune; la somma divisa pel seno del medesimo lato.*

E poichè si può prendere per secondo angolo tanto B che C, così alla cot a corrisponderanno due espressioni; la prima è indicata dalla formula (xiii), l'altra è

$$\cot a = \frac{\cot A \operatorname{sen} B + \cos B \cos c}{\operatorname{sen} c}. \qquad (xiv)$$

Laonde l'intero terzo sistema dà pure occasione alle seguenti formule

$$\cot a = \frac{\cot A \operatorname{sen} C + \cos C \cos b}{\operatorname{sen} b}, \qquad (xiii)$$

$$\cot a = \frac{\cot A \operatorname{sen} B + \cos B \cos c}{\operatorname{sen} c}; \qquad (xiv)$$

$$\cot b = \frac{\cot B \operatorname{sen} A + \cos A \cos c}{\operatorname{sen} c}, \qquad (xv)$$

$$\cot b = \frac{\cot B \operatorname{sen} C + \cos C \cos a}{\operatorname{sen} a}; \qquad \text{(XVI)}$$

$$\cot c = \frac{\cot C \operatorname{sen} A + \cos A \cos b}{\operatorname{sen} b}, \qquad \text{(XVII)}$$

$$\cot c = \frac{\cot C \operatorname{sen} B + \cos B \cos a}{\operatorname{sen} a}. \qquad \text{(XVIII)}$$

184. Avremo finalmente la quarta relazione fra i tre angoli ed un lato osservando che dall' equazione (N) permutando a, A, in b, B, e viceversa ricavasi

$$\operatorname{sen} a \cos b = \operatorname{sen} b \cos a \cos C + \operatorname{sen} c \cos B,$$

e sostituendo questo valore di $\operatorname{sen} a \cos b$ nella stessa equazione (N), per lo chè si ha

$$\cos a \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} b \cos a \cos^2 C + \operatorname{sen} c \cos B \cos C + \operatorname{sen} c \cos A;$$

ponendo $1 - \operatorname{sen}^2 C$ in luogo di $\cos^2 C$, e facendo le opportune riduzioni sarà

$$\frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} a \operatorname{sen}^2 C}{\operatorname{sen} c} = \cos B \cos C + \cos A;$$

ora

$$\frac{\operatorname{sen} b \cos a \operatorname{sen}^2 C}{\operatorname{sen} c} = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c} \cos a \operatorname{sen} C,$$

e dal teorema secondo si ricava, che

$$\frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c} = \operatorname{sen} B;$$

dunque

$$\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a = \cos B \cos C + \cos A$$

ovvero

$$\cos A = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a - \cos B \cos C; \qquad \text{(XIX)}$$

quarto teorema che dimostra essere *il coseno d' un angolo uguale al prodotto de' coseni degli altri due nel coseno del lato comune, meno il prodotto dei coseni degli angoli stessi*.

Questo teorema può immediatamente desumersi dal teorema primo ponendo mente alle proprietà del triangolo polare.

Siano A', B', C', a', b', c', gli angoli e i lati del triangolo polare; in virtù del primo teorema avremo

$$\cos a' = \cos b' \cos' c + \operatorname{sen} b' \operatorname{sen} c' \cos A'$$

ma (n.° 175)

$$a' = 180^\circ - A, \; b' = 180^\circ - B, \; c' = 180^\circ - C,$$

$$A' = 180^\circ - a,$$

dunque, osservando che il coseno d'un arco è uguale al coseno del suo supplemento preso negativamente, sarà

$$\cos A = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a - \cos B \cos C,$$

la quale è identica colla equazione (XIX) precedentemente ottenuta.

Il medesimo teorema dà parimente occasione alle altre equazioni che costituiscono il sistema seguente

$$\cos A = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a - \cos B \cos C, \qquad \text{(XIX)}$$

$$\cos B = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos b - \cos A \cos C, \qquad \text{(XX)}$$

$$\cos C = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c - \cos A \cos B. \qquad \text{(XXI)}$$

CAPITOLO III.

Dei triangoli sferici rettangoli.

185. Facendo l'applicazione delle formule precedentemente stabilite ai triangoli sferici rettangoli, si rendono manifeste alcune importanti proprietà dei medesimi, le quali vengono ordinariamente enunciate ne' sei teoremi che seguono.

Supponiamo che l'angolo retto sia A (fig. 61), e sebbene il nome d'ipotenusa sia veramente proprio del lato opposto all'angolo retto ne' triangoli rettangoli rettilinei, nondimeno dietro l'esempio di molti geometri, col medesimo nome d'ipotenusa indicheremo pure il lato BC opposto all'angolo retto ne' triangoli sferici. Primieramente sarà

$$\text{sen}\,A = 1,\ \cos A = 0,\ \cot A = 0;$$

e quindi avremo

1.° Dalle formule del primo sistema, cioè desunte dal primo dei quattro teoremi precedenti

$$\cos a = \cos b \cos c \qquad \text{(XXII)}$$

ovvero

$$\cos a : \cos b = \cos c : 1$$

donde si vede che in un triangolo sferico rettangolo *il coseno dell'ipotenusa è uguale al prodotto de'coseni degli altri due lati*.

Ciò può comprovarsi mediante una costruzione geometrica. Si abbassi dal vertice C la perpendicolare CA′ sul piano opposto; essa cadrà sulla intersezione ST; dal punto A′ si conduca una perpendicolare A′B′ sopra SB e quindi CB′; l'angolo CB′A′ sarà uguale all'angolo sferico B; l'angolo A′SB′ sarà misurato dall'arco AB; ed inoltre sarà

$$CB' = \text{sen}\,CB, \qquad CA' = \text{sen}\,CA,$$
$$SB' = \cos CB, \qquad SA' = \cos CA.$$

Ond'è che il triangolo A′SB′ pel principio del n.° 61, somministrerà l'equazione

$$SB' = SA' \cos A'SB',$$

la quale, sostituendo alle rette i loro nomi, si cambia nell'equazione

$$\cos CB = \cos CA \cos AB,$$

identica alla (XXII).

2.° Dalle formule componenti il secondo sistema

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} a \qquad \text{(XXIII)}$$

$$\operatorname{sen} c = \operatorname{sen} C \operatorname{sen} a \qquad \text{(XXIV)}$$

ovvero

$$\operatorname{sen} b : \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} a : 1$$

$$\operatorname{sen} c : \operatorname{sen} C = \operatorname{sen} a : 1;$$

per lo che concludesi che *il seno d'un lato è uguale al seno dell'angolo opposto moltiplicato pel seno dell'ipotenusa.*

Infatti dal triangolo $A'CB'$ si ha

$$CA' = CB' \operatorname{sen} CB'A',$$

ovvero

$$\operatorname{sen} CA = \operatorname{sen} CB \operatorname{sen} B,$$

la quale è identica all'equazione (XXIII).

3.° Dalle formule (VII), (VIII), e dalle altre componenti il terzo sistema

$$\operatorname{tang} b = \operatorname{tang} a \cos C \qquad \text{(XXV)}$$

$$\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B \qquad \text{(XXVI)}$$

ovvero

$$\operatorname{tang} b : \operatorname{tang} a = \cos C : 1$$

$$\operatorname{tang} c : \operatorname{tang} a = \cos B : 1;$$

come pure

$$\operatorname{tang} b = \operatorname{tang} B \operatorname{sen} c \qquad \text{(XXVII)}$$

$$\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} C \operatorname{sen} b \qquad \text{(XXVIII)}$$

ovvero

$$\operatorname{tang} b : \operatorname{tang} B = \operatorname{sen} c : 1$$

$$\operatorname{tang} c : \operatorname{tang} C = \operatorname{sen} b : 1.$$

Dalle prime due (XXV) e (XXVI) si vede che *la tangente d'un lato è uguale alla tangente dell'ipotenusa nel coseno dell'angolo compreso.*

Infatti avendo condotte le due perpendicolari BT, BT′, ad SB nel punto B, l'una nel piano dell'arco BA, l'altra in quello dell'arco BC, e prolungati i raggi SA ed SC sino all'incontro delle perpendicolari stesse, sarà

$$BT = \text{tang}\, BA,\ BT' = \text{tang}\, BC;$$

laonde la retta TT′ risulterà perpendicolare a BT, poichè i piani CB′A′, T′BT sono paralleli; quindi il triangolo BTT′ sarà rettangolo in T, e darà

$$BT = BT' \cos B$$

ovvero

$$\text{tang}\, BA = \text{tang}\, BC \cos B,$$

equazione identica alla (XXVI).

4.° Le altre poi (XXVII) e (XXVIII) dimostrano che *la tangente d'un lato è uguale alla tangente dell'angolo opposto nel seno dell'altro lato*.

Ed infatti dal triangolo CA′B′ abbiamo

$$CA' = A'B' \,\text{tang}\, B,$$

e dal triangolo A′SB′ abbiamo

$$A'B' = SA' \,\text{sen}\, A'SB';$$

quindi

$$CA' = SA' \,\text{sen}\, A'SB' \,\text{tang}\, B,$$

ovvero

$$\text{sen}\, CA = \cos CA \,\text{sen}\, AB \,\text{tang}\, B,$$

e finalmente

$$\text{tang}\, CA = \text{tang}\, B \,\text{sen}\, AB;$$

equazione identica alla (XXVII).

5.° Dalla formula (XXIX) quarto, ed ultimo sistema,

$$\cos a = \cot B \cot C \qquad \text{(XXIX)}$$

ovvero

$$\cos a : \cot B = \cot C : 1$$

e dalle (XX) e (XXI) del sistema medesimo

$$\cos B = \cos b \operatorname{sen} C \qquad \text{(XXX)}$$

$$\cos C = \cos c \operatorname{sen} B \qquad \text{(XXXI)}$$

ovvero

$$\cos B : \cos b :: \operatorname{sen} C : 1$$

$$\cos C : \cos c = \operatorname{sen} B : 1 .$$

Or dalla (XXIX) segue che *il coseno dell' ipotenusa è uguale al prodotto delle cotangenti de' due angoli obliqui*.

6.° E dalle due ultime (XXX) e (XXXI) risulta che *il coseno d' uno degli angoli obliqui è uguale al coseno del lato opposto nel seno dell' altro angolo obliquo*.

Questi due principj altro poi non sono che una conseguenza de' precedenti: infatti essendo (XXIII)

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} a,$$

e (XXV)

$$\operatorname{tang} b = \cos C \operatorname{tang} a,$$

se divideremo la prima per la seconda, avremo

$$\cos b = \frac{\operatorname{sen} B}{\cos C} \cos a,$$

ma per la (XXII)

$$\cos a = \cos b \cos c;$$

dunque sostituendo,

$$\cos C = \cos c \operatorname{sen} B;$$

conforme alla (XXXI).

Finalmente ricavando dalle equazioni (XXX), (XXXI) i valori di $\cos b$, $\cos c$, e moltiplicando i risultati abbiamo

$$\cos b \cos c = \frac{\cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C};$$

ovvero

$$\cos a = \cot B \cot C,$$

conforme alla (XXIX).

CAPITOLO IV.

Osservazioni preliminari intorno alla risoluzione generale dei triangoli sferici.

186. Posti i precedenti principj vedremo chiaramente che il teorema dimostrato al n.° 179 da cui sono state desunte tutte le equazioni relative ai triangoli sferici obliquagnoli e rettangoli è da ritenersi come il principio fondamentale della trigonometria sferica. Questo teorema, ed il sistema di equazioni ed esso relative, e conseguentemente tutte le formule cui dà luogo, suppongono che gli elementi del triangolo sferico sieno minori di 90°; nondimeno queste formule si possono estendere a quei casi ancora in cui alcuno di questi elementi supera un tal limite, essendo esso nondimeno al di sotto di 180°, mediante le convenzioni stabilite rispetto alle rette trigonometriche.

187. Da quanto abbiamo detto al n.° 178 risulta che le formule contenute ne' quattro sistemi, debbono essere sufficienti a risolvere tutti i casi della risoluzione de' triangoli sferici. Ma prima di passare all' enumerazione de' casi medesimi ne giova far l' osservazione seguente.

Gli elementi ignoti d' un triangolo sferico saranno dati dalle formule di cui si tratta per mezzo del seno, o del coseno, o della tangente, o della cotangente. Ora il coseno, la tangente e la cotangente faranno nota la natura dell'elemento al quale appartengono mediante il segno da cui queste rette trigonometriche saranno precedute, il quale quando sarà positivo, dimostrerà essere l'elemento minore di 90°,

e maggiore di 90°, quando sarà negativo: ma non così avverrà del seno, il quale conserva il medesimo segno per tutti gli archi compresi tra i limiti 0° e 180°. In questo caso sarà d' uopo aver riguardo alle particolari circostanze del problema, e por mente al principio geometrico che in ogni triangolo sferico, come in ogni triangolo rettilineo, di due lati il maggiore è quello che si trova opposto ad un lato maggiore e viceversa. Avremo luogo però di tornare su tal proposito in seguito, ed allora potremo assegnare più precisi criterj.

CAPITOLO V.

Risoluzione generale dei triangoli sferici rettangoli.

188. Applicando le regole algebriche dei segni alle rette trigonometriche dell' equazione (n.° 185)

$$\cos a = \cos b \cos c,$$

si vede che essa non può essere soddisfatta dai diversi valori di cui sono suscettibili i lati a, b, c, che nelle combinazioni seguenti;

$$+\cos a = +\cos b \times +\cos c$$

$$+\cos a = -\cos b \times -\cos c$$

$$-\cos a = \mp\cos b \times \pm\cos c$$

donde segue che *in qualunque triangolo sferico rettangolo i tre lati possono essere o tutti minori di* 90°, *ovvero due maggiori di* 90° *ed il terzo minore*.

Parimente applicando la stessa regola all' equazione (n.° 185)

$$\operatorname{tang} b = \operatorname{tang} B \operatorname{sen} c$$

avremo

$$\pm \operatorname{tang} b = \pm \operatorname{tang} B \times + \operatorname{sen} c;$$

poichè sen c (nella nostra ipotesi che tutti gli elementi del triangolo sieno minori di 180°) è sempre positivo. Quindi è che *in ogni triangolo sferico rettangolo un angolo obliquo, e il lato che gli è opposto, son sempre della medesima specie, cioè ambedue maggiori o ambedue minori di* 90°.

189. Poichè un triangolo sferico rettangolo risulta determinato allorquando si conoscono di esso due soli angoli obliqui, tra i casi della sua risoluzione converrà, a differenza di ciò che abbiamo fatto pei triangoli rettilinei noverare ancor quello in cui i dati sono questi due angoli. Inoltre distingueremo il caso, nel quale sono dati un angolo obliquo ed un lato, in due, secondo che il lato dato è opposto, oppure adiacente all' angolo dato; perlochè nella risoluzione dei triangoli rettangoli, sei saranno i casi da prendersi in considerazione.

PRIMO CASO

190. Essendo data l' ipotenusa a e l' angolo obliquo B, trovare l' angolo C ed i lati b e c.

Dalle formule (XXIX), (XXIII), (XXVI) (n.° 185) avremo

$$\cot C = \cos a \operatorname{tang} B; \log \cot C = \log \cos a + \log \operatorname{tang} B - 10$$

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} a; \quad \log \operatorname{sen} b = \log \operatorname{sen} B + \log \operatorname{sen} a - 10$$

$$\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B; \log \operatorname{tang} c = \log \operatorname{tang} a + \log \cos B - 10$$

non v' ha incertezza rispetto a b, perchè questo lato sarà della medesima specie dell' angolo dato B (n.° 188).

SECONDO CASO

191. Essendo dato un lato c dell'angolo retto, e l'angolo obliquo B adiacente, trovare l'ipotenusa a, il terzo lato b, e l'angolo C.

Dalle formule (XXVI), (XXVII), (XXXI) (n.° 185) avremo

$$\tang a = \frac{\tang c}{\cos B}; \quad \log \tang a = \log \tang c + \overline{10 - \log \cos B}$$

$$\tang b = \tang B \operatorname{sen} c; \log \tang b = \log \tang B + \log \operatorname{sen} c - 10$$

$$\cos C = \cos c \operatorname{sen} B; \log \cos C = \log \cos c + \log \operatorname{sen} B - 10$$

TERZO CASO

192. Essendo dato un lato b dell'angolo retto e l'angolo B opposto, trovare l'ipotenusa a, il terzo lato c, e l'angolo C.

Dalle formule (XXIII), (XXVII), (XXX) (n.° 185) avremo

$$\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}; \quad \log \operatorname{sen} a = \log \operatorname{sen} b + \overline{10 - \log \operatorname{sen} B};$$

$$\operatorname{sen} c = \frac{\tang b}{\tang B}; \quad \log \operatorname{sen} c = \log \tang b + \overline{10 - \log \tang B};$$

$$\operatorname{sen} C = \frac{\cos B}{\cos b}; \quad \log \operatorname{sen} C = \log \cos B + \overline{10 - \log \cos b}.$$

In questo caso la doppia soluzione non può evitarsi che per le particolari circostanze del problema; infatti stando alle espressioni delle formule si vede che gli elementi incogniti essendo determinati dai seni hanno valori doppj, e ricorrendo alla geometria apparisce chiaro che i due triangoli ABC, AB′C (fig. 62) costituenti il fuso BAB′C, ed

a' quali convengono i due elementi dati A C $= b$ ed A B C $=$ A B′C $=$ B, risolvono ugualmente il quesito.

I valori doppj debbonsi prendere in modo che C, c, sieno della medesima specie; chè allora nota la specie di c, e b si determina quella di a agevolmente (n.° 188).

QUARTO CASO

193. Essendo data l'ipotenusa a, ed un lato b, trovare il terzo lato c, e i due angoli B, C.

Dalle formule (XXII), (XXIII), (XXV) (n.° 185) avremo

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}; \ \log \cos c = \log \cos a + \overline{10 - \log \cos b}$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a}; \ \log \operatorname{sen} B = \log \operatorname{sen} b + \overline{10 - \log \operatorname{sen} a}$$

$$\cos C = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}; \ \log \cos C = \log \operatorname{tang} b + \overline{10 - \log \operatorname{tang} a}.$$

Non esiste incertezza sul valore di B perchè esso è della medesima specie del lato dato b.

QUINTO CASO

194. Essendo dati i due lati b, c dell'angolo retto, trovare l'ipotenusa a, e gli angoli B, C.

Dalle formule (XXII), (XXVII), (XXVIII) (n.° 185) avremo

$$\cos a = \cos b \cos c; \ \log \cos a = \log \cos b + \log \cos c - 10;$$

$$\operatorname{tang} B = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{sen} c}; \ \log \operatorname{tang} B = \log \operatorname{tang} b + \overline{10 - \log \operatorname{sen} c};$$

$$\operatorname{tang} C = \frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{sen} b}; \ \log \operatorname{tang} C = \log \operatorname{tang} c + \overline{10 - \log \operatorname{sen} b}.$$

SESTO CASO

195. Essendo dati i due angoli obliqui B e C, trovare i tre lati a, b, c.

Dalle formule (XXIX), (XXX), (XXXI) (n.° 185) avremo

$$\cos a = \cot B \cot C\,;\ \log\cos a = \log\cot B + \log\cot C - 10;$$

$$\cos b = \frac{\cos B}{\operatorname{sen} C}\,;\ \log\cos b = \log\cos B + \overline{10 - \log\operatorname{sen} C};$$

$$\cos c = \frac{\cos C}{\operatorname{sen} B}\,;\ \log\cos c = \log\cos C + \overline{10 - \log\operatorname{sen} B}.$$

CAPITOLO VI.

Osservazioni sopra i vari casi della risoluzione de' triangoli sferici rettangoli.

196. Se il triangolo sferico fosse *birettangolo*, avesse cioè due angoli retti A, e B, ciascuno dei lati a, e b, sarebbe uguale ad un quadrante; in conseguenza C avrebbe per misura il lato opposto c, ed il triangolo resterebbe determinato qualora fosse dato C, o c.

197. Se poi il triangolo sferico avesse tre angoli retti, ogni lato sarebbe uguale ad un quadrante; il triangolo *trirettangolo* è dunque unico nella sua specie, e resta determinato dal raggio della sfera su cui si suppone descritto.

198. La risoluzione d'un triangolo sferico *rettilatero* cioè avente un lato uguale al quadrante, si riduce a quella d'un triangolo sferico rettangolo: infatti conoscendo due elementi del triangolo rettilatero agevolmente si dedurranno i due elementi corrispondenti del suo triangolo polare,

il quale riuscirà rettangolo ed in conseguenza suscettibile di essere risoluto co' principj esposti; ora è chiaro che determinati i valori de' tre elementi ignoti di questo triangolo si potranno immediatamente ottenere i tre elementi ignoti del triangolo primitivo.

CAPITOLO VII.

Risoluzione generale dei triangoli sferici obliquangoli.

199. Tra i casi della risoluzione d' un triangolo sferico qualunque novereremo ancor quello in cui sono dati i suoi tre angoli, e si propone di determinarne i lati; e novereremo di più quello in cui i dati sono due angoli ed il lato comune; avremo dunque due casi da considerare, oltre i quattro comuni ai triangoli rettilinei.

PRIMO CASO

200. Essendo dati i tre lati a, b, c, trovare gli angoli. Dalla formula (1) (n.° 179) avremo

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}.$$

Ora affine di rendere questa formula atta al calcolo logaritmico si osservi che (n.° 83, XXXV, XXXVI)

$$1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{1}{2} A, \text{ ed } 1 - \cos A = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A$$

donde segue che

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c},$$

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c};$$

ovvero (n.° 108, LX)

$$2\,\text{sen}^2\frac{1}{2}A = \frac{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(a+b-c)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(a-b+c)}{\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c}$$

$$2\cos^2\frac{1}{2}A = \frac{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(a+b+c)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c}$$

e facendo

$$a+b+c=2p,$$

si ha

$$\text{sen}^2\frac{1}{2}A = \frac{\text{sen}\,(p-b)\,\text{sen}\,(p-c)}{\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c} \qquad \text{(A)}$$

$$\cos^2\frac{1}{2}A = \frac{\text{sen}\,p\,\text{sen}\,(p-a)}{\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c} \qquad \text{(B)}$$

$$\text{tang}^2\frac{1}{2}A = \frac{\text{sen}\,(p-b)\,\text{sen}\,(p-c)}{\text{sen}\,p\,\text{sen}\,(p-a)}. \qquad \text{(C)}$$

Quindi applicando i logaritmi

$$2\log\text{sen}\frac{1}{2}A = \log\text{sen}\,(p-b) + \log\text{sen}\,(p-c)$$
$$+\overline{10-\log\text{sen}\,b} + \overline{10-\log\text{sen}\,c}$$

$$2\log\cos\frac{1}{2}A = \log\text{sen}\,p + \log\text{sen}\,(p-a)$$
$$+\overline{10-\log\text{sen}\,b} + \overline{10-\log\text{sen}\,c}$$

$$2\log\text{tang}\frac{1}{2}A = \log\text{sen}\,(p-b) + \log\text{sen}\,(p-c)$$
$$+\overline{10-\log\text{sen}\,p} + \overline{10\log\text{sen}\,(p-a)}.$$

È facile poi dedurre dalle tre formule (A), (B), (C) i tre sistemi seguenti

$$\text{sen}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{sen}\,(p-b)(\text{sen}\,p-c)}{\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c}} \qquad \text{(A)}$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}c}} \qquad (A')$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)(\operatorname{sen}p-b)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}} \qquad (A'')$$

$$\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}} \qquad (B)$$

$$\cos\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}c}} \qquad (B')$$

$$\cos\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}} \qquad (B'')$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-a)}} \qquad (C)$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)(\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-b)}} \qquad (C')$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-c)}} \qquad (C'')$$

SECONDO CASO

201. Essendo dati i tre angoli A, B, C trovare i tre lati. Dalla formula (XIX) (n.° 184) avremo

$$\cos a=\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}$$

e quindi

$$2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a=-\frac{\cos A-\cos(B+C)}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C};$$

$$2\cos^2\frac{1}{2}a=\frac{\cos A+\cos(B-C)}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}$$

ovvero

$$2\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}a=\frac{-2\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\mathrm{sen}\,B\,\mathrm{sen}\,C}$$

$$2\cos^2\frac{1}{2}a=\frac{2\cos\frac{1}{2}(B+A-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\mathrm{sen}\,B\,\mathrm{sen}\,C}$$

e facendo

$$A+B+C=2P,$$

avremo

$$\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}a=\frac{-\cos P\cos(P-A)}{\mathrm{sen}\,B\,\mathrm{sen}\,C} \qquad (D)$$

$$\cos^2\frac{1}{2}a=\frac{\cos(P-B)\cos(P-C)}{\mathrm{sen}\,B\,\mathrm{sen}\,C} \qquad (E)$$

$$\mathrm{tang}^2\frac{1}{2}a=\frac{-\cos P\cos(P-A)}{\cos(P-B)\cos(P-C)}; \qquad (F)$$

le formule logaritmiche si deducono agevolmente da queste come nel precedente caso.

Si hanno poi, com'è manifesto, i tre sistemi seguenti.

$$\mathrm{sen}\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-A)}{\mathrm{sen}\,B\,\mathrm{sen}\,C}} \qquad (D)$$

$$\mathrm{sen}\frac{1}{2}b=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-B)}{\mathrm{sen}\,A\,\mathrm{sen}\,C}} \qquad (D')$$

$$\mathrm{sen}\frac{1}{2}c=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-C)}{\mathrm{sen}\,A\,\mathrm{sen}\,B}} \qquad (D'')$$

$$\cos\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\cos(P-B)\cos(P-C)}{\mathrm{sen}\,B\,\mathrm{sen}\,C}} \qquad (E)$$

$$\cos\frac{1}{2}b=\sqrt{\frac{\cos(P-A)\cos(P-C)}{\mathrm{sen}\,A\,\mathrm{sen}\,C}} \qquad (E')$$

$$\cos\frac{1}{2}c=\sqrt{\frac{\cos(P-A)\cos(P-B)}{\mathrm{sen}\,A\,\mathrm{sen}\,B}} \qquad (E'')$$

$$\tang \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos P \cos(P-A)}{\cos(P-B)\cos(P-C)}} \qquad (F)$$

$$\tang \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{-\cos P \cos(P-B)}{\cos(P-A)\cos(P-C)}} \qquad (F')$$

$$\tang \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{-\cos P \cos(P-C)}{\cos(P-A)\cos(P-B)}} \qquad (F'')$$

Sebbene nella espressione del seno e della tangente, la quantità posta sotto il segno radicale sia negativa, nondimeno allorquando avremo sostituiti alle lettere i numeri, essa risulterà sempre positiva. Infatti essendo in generale $\operatorname{sen}(x - 90^\circ) = \operatorname{sen} x \cos 90^\circ - \operatorname{sen} 90^\circ \cos x = -\cos x$, sarà pure

$$-\cos \frac{1}{2}(A + B + C) = -\cos P = \operatorname{sen}(P - 90^\circ)$$

e poichè P è sempre compreso tra 90° e 270°, l'angolo $P - 90^\circ$ sarà sempre maggiore di zero e minore di 180°; e perciò $\operatorname{sen}(P - 90^\circ)$, ovvero $-\cos P$ sarà sempre una quantità positiva. Osservando poi che nel triangolo polare il lato a' è minore della somma degli altri due b', c', dedurremo la condizione

$$180^\circ - A < 360^\circ - B - C$$

ovvero

$$\frac{1}{2}(B + C - A) < 90^\circ$$

cioè

$$P - A < 90^\circ;$$

a cui debbono soddisfare gli angoli A, B, C; dalla qual condizione risulta essere $\operatorname{sen}(P - A)$ una quantità sempre positiva; dunque i radicali delle precitate formule, apparentemente immaginarj, risulteranno sempre reali.

TERZO CASO

202. Essendo dati due lati a, b, e l'angolo che comprendono C, trovare il terzo lato c, e gli altri due angoli A, B.

Il valore del terzo lato c si trova indipendentemente dal valore degli angoli A, B per mezzo dell'equazione

$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C,$$

che si tratta di rendere atta al calcolo logaritmico. A tal oggetto dividendo per $\cos b$ avremo

$$\frac{\cos c}{\cos b} = \cos a + \operatorname{sen} a \operatorname{tang} b \cos C;$$

e ponendo

$$\operatorname{tang} b \cos C = \operatorname{tang} \phi \qquad \text{(G)}$$

avremo

$$\frac{\cos c}{\cos b} = \frac{\cos(a - \phi)}{\cos \phi}$$

e quindi

$$\cos c = \frac{\cos b \cos(a - \phi)}{\cos \phi} \qquad \text{(H)}$$

Or dalla formula (G) si ha

$$\log \operatorname{tang} \phi = \log \operatorname{tang} b + \log \cos C - 10$$

e quindi il valore di ϕ; per mezzo del quale facilmente si determina c ricorrendo alla (H), dalla quale si ricava

$$\log \cos c = \log \cos b + \log \cos(a - \phi) - \log \cos \phi;$$

questa trasformazione della formula che somministra direttamente il valore di c nelle due (G), (H), equivale alla divisione del triangolo in due triangoli rettangoli ADC, ABD, (fig. 63) i quali si ottengono per mezzo d'una perpendicolare condotta dal vertice A sul lato a; infatti chiaman-

do ϕ il segmento CD di a adiacente all'angolo C, si vede che le equazioni

$$\tang CD = \tang b \cos C,$$

$$\cos c = \cos AD \cos(a - CD) = \frac{\cos b \cos(a - CD)}{\cos CD},$$

le quali si deducono da' triangoli rettangoli ADC, ABD, sono identiche alle formule (G), (H).

Ora per trovare l'angolo A richiameremo la seguente equazione (VII) del terzo sistema

$$\cot A = \frac{\cot a \operatorname{sen} b - \cos b \cos C}{\operatorname{sen} C},$$

la quale si rende atta al calcolo logaritmico ponendo

$$\cot a = \cot \gamma \cos C$$

ovvero

$$\tang \gamma = \tang a \cos C, \qquad (I)$$

infatti risulta per la sostituzione di questo valore di $\cos a$

$$\cot A = \frac{\cot C \operatorname{sen}(b - \gamma)}{\operatorname{sen} \gamma}$$

ovvero

$$\tang A = \frac{\tang C \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen}(b - \gamma)}. \qquad (K)$$

Dedurremo in conseguenza γ dall'equazione

$$\log \tang \gamma = \log \tang a + \log \cos C - 10$$

ed avremo poscia A dalla seguente

$$\log \tang A = \log \tang C + \log \operatorname{sen} \gamma - \log \operatorname{sen}(b - \gamma).$$

È facile pertanto vedere che questa decomposizione della formula (VII) che somministra direttamente A, nelle due (I), (K) equivale all'effettiva decomposizione del triangolo in due triangoli rettangoli, che si ottengono abbassando la per-

pendicolare B D′ da B sopra b: infatti indicando con γ il segmento C D′ di b adiacente all' angolo C, vedremo che le equazioni

$$\text{tang C D}' = \text{tang } a \cos \text{C},$$

$$\text{tang A} = \frac{\text{tang B D}'}{\text{sen}(b - \text{CD}')} = \frac{\text{tang C sen CD}'}{\text{sen}(b - \text{CD}')},$$

dedotte da' triangoli stessi, sono identiche alle formule (I), (K).

Finalmente per ottenere l' angolo B faremo un calcolo analogo al precedente, sopra l' equazione (IX)

$$\cot \text{B} = \frac{\cot b \text{ sen } a - \cos a \cos \text{C}}{\text{sen C}}$$

desunta essa pure dal terzo sistema. E perciò fatto

$$\text{tang } \gamma' = \text{tang } b \cos \text{C} \qquad \text{(L)}$$

risulterà

$$\text{tang B} = \frac{\text{tang C sen } \gamma'}{\text{sen}(a - \gamma')} \qquad \text{(M)}$$

$$\log \text{tang } \gamma' = \log \text{tang } b + \log \cos \text{C} - 10$$

$$\log \text{tang B} = \log \text{tang C} + \log \text{sen } \gamma' - \log \text{sen } (a - \gamma')$$

QUARTO CASO

203. Essendo dati due angoli B, C, ed il lato comune a, trovare il terzo angolo A, e gli altri due lati b, c.

Rispetto all' angolo A porremo (XIX)

$$\cos \text{A} = \text{sen B sen C} \cos a - \cos \text{B} \cos \text{C};$$

equazione presa dal quarto sistema che si tratta di rendere atta al calcolo dei logaritmi. A tal oggetto dividendo per cos C, avremo

$$\frac{\cos A}{\cos C} = \operatorname{tang} C \operatorname{sen} B \cos a - \cos B,$$

e facendo

$$\operatorname{tang} C \cos a = \cot \theta,$$

ovvero

$$\cos a = \cot \theta \cot C, \qquad (N)$$

sarà

$$\cos A = \frac{\cos C \operatorname{sen}(B - \theta)}{\operatorname{sen} \theta}; \qquad (O)$$

ond'è che avremo θ dall'equazione

$$\log \cot \theta = \log \operatorname{tang} C + \log \cos a - 10$$

e dipoi A dalla seguente

$$\log \cos A = \log \cos C + \log \operatorname{sen}(B - \theta) - \log \operatorname{sen} \theta$$

Abbassando dal vertice B (fig. 64) la perpendicolare BD sul lato opposto vedremo che la trasformazione della formula (XIX) che somministra direttamente A, nelle due (N), (O), si riduce alla divisione del triangolo ne' due triangoli rettangoli ABD, CBD: infatti indicando con θ l'angolo CBD si vedrà che le equazioni

$$\cos a = \cot CBD \cot C,$$

$$\cos A = \cos BD \operatorname{sen}(B - CBD) = \frac{\cos C \operatorname{sen}(B - CBD)}{\operatorname{sen} CBD}$$

sono identiche alle (N), (O).

Per trovare il lato c porremo poi (XVIII)

$$\cot c = \frac{\cot C \operatorname{sen} B + \cos B \cos a}{\operatorname{sen} a}$$

equazione del terzo sistema, che potrà rendersi idonea al calcolo logaritmico facendo, come nella precedente

$$\cot C = \cos a \operatorname{tang} \theta$$

ovvero

$$\cos a = \cot \theta \cot C;$$

infatti risulta

$$\cot C = \frac{\cot a \cos(B - \theta)}{\cos \theta}$$

ovvero

$$\tang c = \frac{\tang a \cos \theta}{\cos(B - \theta)} \qquad (P)$$

Così ottenuto θ, come sopra, avremo c dalla seguente

$$\log \tang c = \log \tang a + \log \cos \theta - \log \cos(B - \theta)$$

E qui pure si può osservare che la formula (P) ci vien somministrata dal triangolo ADB, dal quale si ha

$$\tang c = \frac{\tang DB}{\cos(B - CBD)} = \frac{\tang a \cos CBD}{\cos(B - CBD)}.$$

Finalmente partendo dalla formula

$$\cot b = \frac{\cot B \operatorname{sen} C + \cos C \cos a}{\operatorname{sen} a},$$

e facendo

$$\cot B = \cos a \tang \theta' \qquad (Q)$$

si giunge, per un calcolo analogo al precedente, a

$$\tang b = \frac{\tang a \cos \theta'}{\cos(C - \theta')}; \qquad (R)$$

queste formule si possono dedurre come le precedenti (N) e (P) da' triangoli rettangoli ACD′, BCD′, rappresentando con θ' l'angolo BCD′. Frattanto abbiamo

$$\log \cot \theta' = \log \tang B + \log \cos a - 10$$

$$\log \tang b = \log \tang a + \log \cos \theta' - \log \cos(C - \theta')$$

QUINTO CASO

204. Essendo dati due lati b, c, e l'angolo C opposto ad uno di essi, trovare il terzo lato a, e gli altri due angoli A, B.

Le formule (G), (H) di cui ci siamo valsi nella risoluzione del terzo caso, possono adoprarsi anche nel caso presente per determinare il lato a; infatti dalla (H) si ha

$$\cos(a-\phi) = \frac{\cos c \cos \phi}{\cos b} \qquad \text{(S)}$$

e ϕ si deduce dalla (G): abbiamo dunque per la determinazione di a, le due formule seguenti

$$\log \operatorname{tang} \phi = \log \operatorname{tang} b + \log \cos C - 10$$

$$\log \cos(a-\phi) = \log \cos c + \log \cos \phi - \log \cos b$$

trovato il valore di $a-\phi$ vi si aggiunge ϕ, e si ha a.

Per determinare l'angolo A ci varremo delle formule (N) e (P) dove cambiando B, b in A, a si ha

$$\cos b = \cot \theta \cot C,$$

$$\operatorname{tang} c = \frac{\operatorname{tang} b \cos \theta}{\cos(A-\theta)};$$

e quindi

$$\cot \theta = \operatorname{tang} C \cos b, \qquad \text{(T)}$$

$$\cos(A-\theta) = \frac{\operatorname{tang} b \cos \theta}{\operatorname{tang} c}; \qquad \text{(U)}$$

e però

$$\log \cot \theta = \log \operatorname{tang} C + \log \cos b - 10$$

$$\log \cos(A-\theta) = \log \operatorname{tang} b + \log \cos \theta - \log \operatorname{tang} c$$

determinando per mezzo della prima θ, si ottiene dipoi A mediante la seconda.

Finalmente onde ottenere B ricorreremo alla formula

$$\text{sen}\, B = \frac{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, C}{\text{sen}\, c} \qquad (V)$$

tratta dal secondo sistema, la quale dà

$$\log \text{sen}\, B = \log \text{sen}\, C + \log \text{sen}\, b - \log \text{sen}\, c.$$

SESTO CASO

205. Essendo dati due angoli A, C ed un lato a opposto ad uno di essi, trovare il terzo angolo B, e gli altri due lati b, c.

La formula (O) serve a determinare l'angolo B; poichè da essa si ha

$$\text{sen}\,(B - \omega) = \frac{\cos A\, \text{sen}\, \omega}{\cos C} \qquad (X)$$

ω essendo dato dalla (N); dunque abbiamo

$$\log \cot \omega = \log \text{tang}\, C + \log \cos a - 10$$

$$\log \text{sen}\,(B - \omega) = \log \cos A + \log \text{sen}\, \omega - \log \cos C.$$

La formula (K) servirà poi a determinare il lato b, e avremo

$$\text{sen}\,(b - \gamma) = \frac{\text{tang}\, C\, \text{sen}\, \gamma}{\text{tang}\, A} \qquad (Y)$$

γ essendo dato dalla (I); così abbiamo

$$\log \text{tang}\, \gamma = \log \text{tang}\, a + \log \cos C - 10$$

$$\log \text{sen}\,(b - \gamma) = \log \text{tang}\, C + \log \text{sen}\, \gamma - \log \text{tang}\, A$$

Finalmente per ottenere il valore del lato c porremo

$$\text{sen}\, c = \frac{\text{sen}\, a\, \text{sen}\, C}{\text{sen}\, A} \qquad (Z)$$

equazione del secondo sistema, la quale dà

$$\log \text{sen}\, c = \log \text{sen}\, a + \log \text{sen}\, C - \log \text{sen}\, A$$

CAPITOLO VIII.

Osservazioni sopra i varj casi della risoluzione dei triangoli obliquangoli.

206. Da quanto precede risulta che risolvendo le formule in fattori per l'uso dei logaritmi si effettua realmente la divisione del triangolo sferico in due triangoli sferici rettangoli; cosicchè facendo direttamente uso delle formule spettanti a' triangoli rettangoli potremmo fare a meno del terzo teorema (n.° 182), e delle formule che ne dipendono.

207. È poi facile vedere che gli annoverati sei casi, per le proprietà del triangolo polare si riducono a tre; poichè conoscendo un lato del triangolo primitivo, si conosce un angolo del suo polare, e viceversa; ed essendo dati i tre angoli del primo, sono parimente dati i tre lati del secondo. Dunque nell'ipotesi che gli elementi a, b, c, A, B, C sieno cambiati in $180° - A$, $180° - B$, $180° - C$, $180° - a$, $180° - b$, $180° - c$, potremo valerci delle formule del primo, terzo e quinto caso per risolvere il secondo, quarto e sesto.

208. Or non bisogna trascurare di far conoscere le formule per mezzo delle quali si ottengono ad un tempo due lati, allorquando si conoscono i due angoli opposti ed il lato comune, e due angoli quando si conoscono i due lati opposti e l'angolo fra essi compreso. Queste formule si conoscono sotto il nome di *Analogie di Nepero*, e si possono facilmente determinare sostituendo nella nota formula

$$\tang \frac{1}{2}(A \pm B) = \frac{\tang \frac{1}{2} A \pm \tang \frac{1}{2} B}{1 \pm \tang \frac{1}{2} A \tang \frac{1}{2} B}$$

i valori di $\tang \frac{1}{2} A$, e $\tang \frac{1}{2} B$ dati dalle formule (C) (C').

Eccone il calcolo:

$$\tang \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sen(p-b)\sen(p-c)}{\sen p \sen(p-a)}},$$

$$\tang \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sen(p-a)\sen(p-c)}{\sen p \sen(p-b)}},$$

$$\tang \frac{1}{2} A \tang \frac{1}{2} B = \frac{\sen(p-c)}{\sen p};$$

cambiando in questa equazione b, B in c, C, sarà

$$\tang \frac{1}{2} A \tang \frac{1}{2} C = \frac{\sen(p-b)}{\sen p};$$

e se or si cambino A, a in B, b, sarà pure

$$\tang \frac{1}{2} B \tang \frac{1}{2} C = \frac{\sen(p-a)}{\sen p};$$

dunque

$$1 + \tang \frac{1}{2} A \tang \frac{1}{2} B = \frac{\sen p + \sen(p-c)}{\sen p}$$

$$= \frac{2 \sen \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2} c}{\sen p}$$

$$1 - \tang \frac{1}{2} A \tang \frac{1}{2} B = \frac{\sen p - \sen(p-c)}{\sen p}$$

$$= \frac{2 \cos \frac{1}{2}(a+b) \sen \frac{1}{2} c}{\sen p}$$

$$(\tang \tfrac{1}{2}A + \tang \tfrac{1}{2}B) \tang \tfrac{1}{2} c = \frac{\sen(p-b)+\sen(p-a)}{\sen p}$$

$$\tang \tfrac{1}{2}A + \tang \tfrac{1}{2}B = \frac{2 \sen \frac{1}{2} c \cot \frac{1}{2}(a-b)}{\sen p} \cot \tfrac{1}{2} C$$

$$(\tang \tfrac{1}{2}A - \tang \tfrac{1}{2}B) \tang \tfrac{1}{2} C = \frac{\sen(p-b)-\sen(p-a)}{\sen p}$$

$$\tang \tfrac{1}{2}A - \tang \tfrac{1}{2}B = \frac{2 \cos \frac{1}{2} c \sen \frac{1}{2}(a-b)}{\sen p} \cot \tfrac{1}{2} C;$$

e finalmente

$$\tang \tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \cot \tfrac{1}{2} C \qquad (AA)$$

$$\tang \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sen \frac{1}{2}(a-b)}{\sen \frac{1}{2}(a+b)} \cot \tfrac{1}{2} C \qquad (BB)$$

le quali si possono risolvere nelle due seguenti proporzioni

$$\cos \tfrac{1}{2}(a+b) : \cos \tfrac{1}{2}(a-b) = \cot \tfrac{1}{2} C : \tang \tfrac{1}{2}(A+B)$$

$$\sen \tfrac{1}{2}(a+b) : \sen \tfrac{1}{2}(a-b) = \cot \tfrac{1}{2} C : \tang \tfrac{1}{2}(A-B).$$

Sostituendo poi nell' equazione

$$\tang \tfrac{1}{2}(a \pm b) = \frac{\tang \frac{1}{2} a \pm \tang \frac{1}{2} b}{1 \mp \tang \frac{1}{2} a \tang \frac{1}{2} b}$$

i valori di $\tang \frac{1}{2} a$, $\tang \frac{1}{2} b$ dati dalle formule (F), (F′) (n.° 201), avremo pure

$$\tang \frac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} \tang \frac{1}{2} c \quad (CC)$$

$$\tang \frac{1}{2}(a-b) = \frac{\sen \frac{1}{2}(A-B)}{\sen \frac{1}{2}(A+B)} \tang \frac{1}{2} c \quad (DD)$$

ovvero le proporzioni

$$\cos \frac{1}{2}(A+B) : \cos \frac{1}{2}(A-B) = \tang \frac{1}{2} c : \tang \frac{1}{2}(a+b)$$

$$\sen \frac{1}{2}(A+B) : \sen \frac{1}{2}(A-B) = \tang \frac{1}{2} c : \tang \frac{1}{2}(a-b)$$

Ma è facile vedere che le (CC), (DD) potrebbero parimente dedursi dalle (AA), (BB) per le proprietà del triangolo polare cambiando cioè a, b, A, B, C in $180^\circ - A$, $180^\circ - B$, $180^\circ - a$, $180^\circ - b$, $180^\circ - c$.

Colle due (AA), (BB) troveremo la semisomma e la semidifferenza degli angoli A, B, e quindi gli angoli stessi quando saranno dati i lati opposti a, b e l'angolo compreso C. E colle altre (CC), (DD) troveremo la semisomma e la semidifferenza de' lati a, b, e quindi i lati stessi ove sieno dati i due angoli opposti A, B ed il lato comune c.

Or prendendo tutte le variazioni di cui queste formule sono suscettibili, avremo il seguente sistema.

$$\tang \frac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \cot \frac{1}{2} C$$

$$\tang \frac{1}{2}(A-B) = \frac{\sen \frac{1}{2}(a-b)}{\sen \frac{1}{2}(a+b)} \cot \frac{1}{2} C$$

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}(A+C)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-c)}{\cos\frac{1}{2}(a+c)}\cot\frac{1}{2}B$$

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}(A-C)=\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(a-c)}{\text{sen}\,\frac{1}{2}(a+c)}\text{tang}\,\frac{1}{2}B$$

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}(B+C)=\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)}\cot\frac{1}{2}A$$

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}(B-C)=\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(b-c)}{\text{sen}\,\frac{1}{2}(b+c)}\text{tang}\,\frac{1}{2}A$$

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\text{tang}\,\frac{1}{2}c$$

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}(a-b)=\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(A-B)}{\text{sen}\,\frac{1}{2}(A+B)}\text{tang}\,\frac{1}{2}c$$

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}(a+c)=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-C)}{\cos\frac{1}{2}(A+C)}\text{tang}\,\frac{1}{2}b$$

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}(a-c)=\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(A-C)}{\text{sen}\,\frac{1}{2}(A+C)}\text{tang}\,\frac{1}{2}b$$

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}(b+c)=\frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}\text{tang}\,\frac{1}{2}a$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(b+c)=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(B-C)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(B+C)}\operatorname{tang}\frac{1}{2}a$$

Da queste si deducono le dodici seguenti per mezzo delle quali si trova il terzo angolo, e il terzo lato d'un triangolo, quando si conoscono due lati e i due angoli opposti.

$$\cot\frac{1}{2}C=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)$$

$$\cot\frac{1}{2}C=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\cot\frac{1}{2}B=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+c)}{\cos\frac{1}{2}(a-c)}\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+C)$$

$$\cot\frac{1}{2}B=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+c)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-c)}\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-C)$$

$$\cot\frac{1}{2}A=\frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\frac{1}{2}(b-c)}\operatorname{tang}\frac{1}{2}(B+C)$$

$$\cot\frac{1}{2}A=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(b+c)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(b-c)}\operatorname{tang}\frac{1}{2}(B-C)$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}c=\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b)$$

$$\tang \frac{1}{2} c = \frac{\sen \frac{1}{2}(A+B)}{\sen \frac{1}{2}(A-B)} \tang \frac{1}{2}(a-b)$$

$$\tang \frac{1}{2} b = \frac{\cos \frac{1}{2}(A+C)}{\cos \frac{1}{2}(A-C)} \tang \frac{1}{2}(a+c)$$

$$\tang \frac{1}{2} b = \frac{\sen \frac{1}{2}(A+C)}{\sen \frac{1}{2}(A-C)} \tang \frac{1}{2}(a-c)$$

$$\tang \frac{1}{2} a = \frac{\cos \frac{1}{2}(B+C)}{\cos \frac{1}{2}(B-C)} \tang \frac{1}{2}(b+c)$$

$$\tang \frac{1}{2} a = \frac{\sen \frac{1}{2}(B+C)}{\sen \frac{1}{2}(B-C)} \tang \frac{1}{2}(b-c)$$

209. Se il triangolo da risolversi fosse isoscele (fig. 65), avesse cioè due lati a, c uguali, gli angoli A, C sarebbero parimente uguali, e le formule corrispondenti ai quattro fondamentali teoremi anderebbero soggette a delle rimarchevoli modificazioni. Meglio è per altro dedurre le formule relative al triangolo sferico isoscele dai due triangoli rettangoli ne' quali esso si decompone abbassando dal vertice un arco perpendicolare su la base. Sia il triangolo isoscele ABC; BD sia perpendicolare ad AC; poichè

$$AD = DC = \frac{1}{2} b; \; ABD = DBC = \frac{1}{2} B$$

avremo

$$2 \sen \frac{1}{2} b = \sen \frac{1}{2} B \sen a$$

$$\tan\frac{1}{2}b = \tan a \cos A \qquad (J)$$

$$\cos a = \cot\frac{1}{2}B \cot A$$

$$\cos\frac{1}{2}B = \cos\frac{1}{2}b \operatorname{sen} A.$$

Or la risoluzione d'un triangolo isoscele consiste nel determinare due delle quattro quantità A, B, a, b essendo date le altre due: sei casi si possono presentare; per risolvere i quali converrà che sieno note tante equazioni quante sono le differenti combinazioni che si possono formare co' quattro elementi A, B, a, b presi tre a tre; queste combinazioni son quattro, dunque le equazioni precedenti bastano a risolvere qualunque caso che si può presentare.

210. Di sei casi che noi abbiamo contemplati trattando della risoluzione generale de' triangoli sferici, non v' ha che il quinto ed il sesto che lascino incerta la soluzione rispetto alla natura degli elementi: or per distinguere le circostanze in cui tale incertezza può esser tolta, faremo le riflessioni seguenti.

1.° Sia $C < 90°$, $b < 90°$.

Supponendo che il triangolo corrispondente a questa ipotesi sia ABC (fig. 66), abbasseremo da A un arco di circolo massimo perpendicolare sul lato opposto, e preso $DB' = DB$, condurremo AB', e sarà $AB' = AB = c$; ora è chiaro che gli elementi c, b, C convengono ai due triangoli ABC, $AB'C$; in questo caso $c < b$, poichè c e b sono due archi obliqui il secondo dei quali più si discosta del primo dall'arco perpendicolare.

Ma se il triangolo fosse $AB''C$, e fosse $DB'' > DC$, allora

preso $DB''' = DB''$, e condotto AB''', vedremo che i tre elementi suddetti c, b, C non possono convenire che al triangolo $AB''C$; in questo $AB''' = c > b$. Dunque ai dati

$C < 90°$, $b < 90°$, $c > b$ corrisponde una soluzione,

ed ai dati

$C < 90°$, $b < 90°$, $c < b$ corrispondono due soluzioni.

2.° Sia $C < 90°$, $b > 90°$.

Essendo $A'B''C$ il triangolo corrispondente, si abbassi la perpendicolare $A'D'$, si prenda $D'B'^{v} = D'B''$ e si tiri $A'B'^{v}$; gli elementi c, b, C converranno com'è chiaro ai due triangoli $A'B''C$, $A'B'^{v}C$; or prolungando i due lati CA', CB'^{v} sino al loro incontro in C', sarà $CA' + A'C' = 180°$ ed $A'B'^{v} = c < A'C'$ e $b + c < 180°$.

Se poi il triangolo fosse $A'B'C$ e $D'B' > D'C'$, preso $D'B^{v} = D'B'$, e condotto $A'B^{v}$, si vedrebbe che i medesimi elementi c, b, C convengono al solo triangolo $A'B'C$; in questo caso $A'B^{v} = A'B' = c > A'C'$ e $b + c > 180°$. Dunque ai dati

$C < 90°$, $b > 90°$, $b + c > 180°$ corrisponde una soluzione,

ed ai dati

$C < 90°$, $b > 90°$, $b + c < 180°$ corrispondono due soluzioni.

Riflessioni analoghe alle precedenti si farebbero ove C fosse maggiore di 90° e si concluderebbe

3.° Che si ha una sola soluzione quando

$$C > 90° \quad b < 90° \quad b + c < 180°$$

se ne hanno due quando

$$C > 90° \quad b < 90° \quad b + c > 180°$$

4.° Che si ha pure una soluzione quando

$$C > 90° \quad b > 90° \quad c < b$$

e due quando

$$C > 90^\circ \quad b > 90^\circ \quad c > b$$
$$C < 90^\circ \quad b = 90^\circ$$
$$C > 90^\circ \quad b = 90^\circ$$

Riunendo questi risultati si può concludere che agli elementi dati c, b, C corrisponderà un solo triangolo, quando sarà

$$C = 90^\circ$$
$$C < 90^\circ \quad b < 90^\circ \quad c > b$$
$$C < 90^\circ \quad b > 90^\circ \quad b + c > 180^\circ$$
$$C > 90^\circ \quad b < 90^\circ \quad b + c < 180^\circ$$
$$C > 90^\circ \quad b > 90^\circ \quad c < b$$

e vi corrisponderanno due triangoli quando sarà

$$C < 90^\circ \quad b < 90^\circ \quad c < b$$
$$C < 90^\circ \quad b > 90^\circ \quad b + c < 180^\circ$$
$$C > 90^\circ \quad b < 90^\circ \quad b + c > 180^\circ$$
$$C > 90^\circ \quad b > 90^\circ \quad c > b$$
$$C < 90^\circ \quad b = 90^\circ$$
$$C > 90^\circ \quad b = 90^\circ$$

Ora applicando questi criterj al sesto caso mediante il triangolo polare potremo parimente concludere che agli elementi dati C, B, c, corrisponderà un solo triangolo quando sarà

$$c = 90^\circ$$
$$c > 90^\circ \quad B > 90^\circ \quad C < B$$
$$c > 90^\circ \quad B < 90^\circ \quad B + C < 180^\circ$$
$$c < 90^\circ \quad B > 90^\circ \quad B + C > 180^\circ$$
$$c < 90^\circ \quad B < 90^\circ \quad C > B$$

e finalmente ne corrisponderanno due quando sarà

$c > 90°$	$B > 90°$	$C > B$
$c > 90°$	$B < 90°$	$B + C > 180°$
$c < 90°$	$B > 90°$	$B + C < 180°$
$c < 90°$	$B < 90°$	$C < B$
$c < 90$	$B = 90°$	
$c > 90°$	$B = 90°$	

PARTE QUARTA

APPLICAZIONE DELLA TRIGONOMETRIA SFERICA ALLA GEOMETRIA SFERICA ED AI POLIEDRI

PROBLEMA I.

211. Dati i lati d'un triangolo sferico determinare il raggio del circolo circoscritto.

Il circolo circoscritto al triangolo sferico non è che il circolo circoscritto al triangolo rettilineo formato dalle corde de' suoi lati; e poichè le corde medesime sono rappresentate da

$$2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} a, \quad 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} b, \quad 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} c,$$

essendo a, b, c i lati del triangolo sferico, segue che sostituendo nella formula (IX) n.° 141 in luogo di a, b, c queste corde, avremo il valore del raggio r' del circolo circoscritto al triangolo sferico espresso per una funzione dei suoi lati. Primieramente sarà

$$r' = \frac{8 \operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{sen} \frac{1}{2} c}{d}; \qquad (1)$$

per trovar d è chiaro che dovremo sostituire nell'espressione

$$\sqrt{[2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4)]}$$

$$32 \left(\operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} b \right)^2 \text{ a } 2a^2b^2;$$

$$32\left(\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\right)^2 \text{ a } 2a^2c^2;$$

$$32\left(\operatorname{sen}\frac{1}{2}b\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\right)^2 \text{ a } 2b^2c^2;$$

$$16\operatorname{sen}^4\frac{1}{2}a \text{ ad } a^4;$$

$$16\operatorname{sen}^4\frac{1}{2}b \text{ a } b^4;$$

$$16\operatorname{sen}^4\frac{1}{2}c \text{ a } c^4.$$

Laonde avendo presente la formula (n.° 83, xxxv) agevolmente troveremo

$$d^2 = 4\left(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c\right)$$
$$+8\left(1-\cos a\right)\left(1-\cos b\right)\left(1-\cos c\right)$$

ovvero

$$d^2 = 4\left(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c\right)$$
$$+64\left(\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\right)^2$$

e ponendo

$$f=\sqrt{(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c)} \quad \text{(II)}$$

avremo

$$d=\sqrt{\left[4f+64\left(\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\right)^2\right]} \quad \text{(III)}$$

È da osservarsi (n.° 180) che

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}=\frac{f}{\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c} \quad \text{(IV)}$$

donde

$$f=\operatorname{sen} A\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c \quad \text{(V)}$$

Or per sostituire a sen A una funzione dei soli lati atta al calcolo logaritmico si osservi che (n.° 179, I)

$$\text{sen}^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{(\cos b \cos c - \cos a)^2}{(\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c)^2}$$

$$\text{sen}^2 A = \frac{(\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c)^2 - (\cos b \cos c - \cos a)^2}{(\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c)^2}$$

ovvero

$$\text{sen}^2 A = \frac{[\cos(b-c) - \cos a][\cos a - \cos(b+c)]}{(\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c)^2}$$

avremo

$$\cos(b-c) - \cos a = 2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(a+b-c)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(a-b+c)$$

$$\cos a - \cos(b+c) = 2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(a+b+c)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(b+c-a)$$

e finalmente, posto $a+b+c=2p$

$$\text{sen}\, A = \frac{2\sqrt{[\text{sen}\, p\, \text{sen}(p-a)\,\text{sen}(p-b)\,\text{sen}(p-c)]}}{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c} \qquad \text{(VI)}$$

si vede adunqne che

$$f = 2\sqrt{[\text{sen}\, p\, \text{sen}(p-a)\,\text{sen}(p-b)\,\text{sen}(p-c)]} \qquad \text{(VII)}$$

PROBLEMA II.

212. Dati i lati d'un triangolo sferico determinare la superficie del triangolo rettilineo formato dalle corde dei medesimi lati.

Ricorrendo alla formula (XI) n.° 141, si ha immediatamente la soluzione del quesito.

Chiamando t la superficie richiesta, sarà

$$t = \frac{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}a\,\text{sen}\,\frac{1}{2}b\,\text{sen}\,\frac{1}{2}c}{r} \qquad \text{(VIII)}$$

ovvero (I)

$$t = \frac{1}{4} d$$

e posto il valore di d espresso pei lati (111)

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{[f + 16 (\text{sen} \frac{1}{2} a \, \text{sen} \frac{1}{2} b \, \text{sen} \frac{1}{2} c)^2]} \qquad \text{(IX)}$$

PROBLEMA III.

213. Determinare la superficie del triangolo sferico essendo noti i suoi tre angoli.

Sia ABC (fig. 67) il triangolo proposto; prolunghiamo i suoi lati finchè incontrino il circolo massimo EGID descritto in modo che comprenda il triangolo dato.

I due triangoli DAE, HAG presi insieme equivalgono al fuso il cui angolo è A. Ora il fuso sta alla superficie della sfera come l'angolo A del fuso stà a quattro angoli retti; però indicando con F il fuso medesimo, e con K la superficie della sfera, sarà

$$F = \frac{A}{4q} K;$$

dove q rappresenta l'angolo retto, o il quadrante. Dunque avremo

$$DAE + HAG = \frac{A}{4q} . K$$

$$GBF + IBD = \frac{B}{4q} . K$$

$$HCI + FCE = \frac{C}{4q} . K$$

sommando, e riducendo risulterà

$$ABC = \frac{K}{8q} (A + B + C - 2q),$$

ovvero

$$ABC : K = A + B + C - 2q : 8q$$

donde segue il teorema, che Bonaventura Cavalieri dimostrò il primo, cioè che *l'area del triangolo sferico stà alla superficie intera della sfera come l'eccesso de' tre angoli del triangolo sopra due retti, stà a otto angoli retti*.

Ora esprimendo con E l'eccesso della somma de' tre angoli A, B, C sopra due retti, ed osservando che, presa per unità di misura delle superficie sferiche il triangolo trirettangolo, e per unità degli angoli l'angolo retto, $K = 8$, $8q = 8$, avremo

$$ABC : 8 = E : 8$$

ed

$$ABC = E$$

equazione di convenzione, la quale esprime che tante unità angolari sono in E, quante unità superficiali sono in ABC; dunque E esprimerà pure l'area del triangolo e l'equazione

$$E = A + B + C - 180^\circ \qquad (x)$$

risolverà il problema proposto.

PROBLEMA IV.

214. Determinare l'area del triangolo sferico essendone dati due lati e l'angolo compreso.

Dalla suddetta formula (x) si ricava

$$-\cot\frac{1}{2}E = \tang\left[\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}(B + C)\right]$$

ed in conseguenza

$$-\cot\frac{1}{2}E = \frac{\tang\frac{1}{2}A + \tang\frac{1}{2}(B+C)}{1 - \tang\frac{1}{2}A\,\tang\frac{1}{2}(B+C)};$$

ma secondo le analogie di Nepero

$$\tang \frac{1}{2}(B+C) = \frac{\cos \frac{1}{2}(b-c)}{\cos \frac{1}{2}(b+c)} \cot \frac{1}{2} A$$

dunque

$$-\cot \frac{1}{2} E = \frac{\tang \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2}(b+c) + \cot \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2}(b-c)}{\cos \frac{1}{2}(b+c) - \cos \frac{1}{2}(b-c)};$$

moltiplicando il numeratore e denominatore per $\tang \frac{1}{2} A$, e facendo le opportune operazioni avremo

$$\cot \frac{1}{2} E = \frac{(1+\tan^2 \frac{1}{2} A)\cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c + (1-\tan^2 \frac{1}{2} A)\operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{sen} \frac{1}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \tang \frac{1}{2} A}$$

Or dalla formula (XLVIII) n.° 106, agevolmente si deduce questa equazione

$$1 - \tang^2 \frac{1}{2} A = (1 + \tang^2 \frac{1}{2} A) \cos A .$$

Oltredichè essendo (XXVII) n.° 80,

$$2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A = \operatorname{sen} A$$

otterremo, col soccorso ancora delle formule (VII) (VIII) n.° 65,

$$\frac{2 \tang \frac{1}{2} A}{1+\tang^2 \frac{1}{2} A} = \operatorname{sen} A .$$

E conseguentemente

$$\cot \frac{1}{2} E = \frac{\cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c + \operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \cos A}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \operatorname{sen} A}; \quad (XI)$$

finalmente, dividendo i due termini di questa frazione per $\operatorname{sen}\frac{1}{2}b\operatorname{sen}\frac{1}{2}c$, ne conseguirà questa formula

$$\cot\frac{1}{2}E = \frac{\cot\frac{1}{2}b\cot\frac{1}{2}c + \cos A}{\operatorname{sen} A} \qquad \text{(XII)}$$

PROBLEMA V.

215. Determinare l'area del triangolo sferico, conoscendo i suoi tre lati.

Osservando che

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c}$$

e che (XLVII) n.° 106

$$\cot\frac{1}{2}b\cot\frac{1}{2}c = \frac{1+\cos b}{\operatorname{sen} b}\cdot\frac{1+\cos c}{\operatorname{sen} c}$$

$$= \frac{1+\cos b+\cos c+\cos b\cos c}{\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c},$$

avremo

$$\cot\frac{1}{2}b\cot\frac{1}{2}c + \cos A = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c};$$

talmentechè la precedente formula (XII) diverrà

$$\cot\frac{1}{2}E = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c\operatorname{sen} A}$$

e poichè $\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c\operatorname{sen} A = f$ (n.° 211, V) avremo

$$\cot\frac{1}{2}E = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{f} \qquad \text{(XIII)}$$

216. Questa formula risolve il problema proposto; ma non è atta al calcolo logaritmico: pertanto è d'uopo ag-

giunger la seguente determinata per altra via di calcolo dal ch: signor Legendre.

Si rifletta che dalle formule (IV) ed (I) n.° 64 si ha

$$\cot^2 \frac{1}{2} E = \frac{\cos^2 \frac{1}{2} E}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} E} = 1 - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{3} E};$$

cosicchè

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} E} = 1 + \frac{\left(\cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c + \operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \cos A\right)^2}{\left(\operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \operatorname{sen} A\right)^2}$$

riducendo allo stesso denominatore, sviluppando, e dipoi osservando che

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$$

$$= \frac{2 \cos^2 \frac{1}{2} a - 2 \cos^2 \frac{1}{2} b \cos^2 \frac{1}{2} c - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} b \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c}{4 \operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}$$

e che

$$\operatorname{sen} A = \frac{f}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} = \frac{f}{4 \operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c},$$

otterremo senza difficoltà

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} E} = \frac{16 \cos^2 \frac{1}{2} a \cos^2 \frac{1}{2} b \cos^2 \frac{1}{2} c}{f^2}$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} E = \frac{f}{4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} \qquad \text{(XIV)}$$

217. Ora moltiplicando le due equazioni (XIII) (XIV) membro a membro, e riflettendo che

$$\cot\frac{1}{2}E \operatorname{sen}\frac{1}{2}E = \cos\frac{1}{2}E,$$

avremo

$$\cos\frac{1}{2}E = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}; \qquad \text{(XV)}$$

quindi mediante la formula (XXXVI) n.° 83, troveremo pure

$$\cos\frac{1}{2}E = \frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}; \qquad \text{(XVI)}$$

queste due ultime formule elegantissime, e tutte composte di termini razionali sono dovute al sullodato signor Legendre.

218. Dalle (XVI) e (XIV) si deduce poi agevolmente la formula di Lhuillier, che dà il valore di $\operatorname{tang}\frac{1}{4}E$, ed a cui si possono pure applicare i logaritmi; abbiamo (n.° 106. XLVI)

$$\operatorname{tang}\frac{1}{4}E = \frac{1-\cos\frac{1}{2}E}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}E};$$

dunque

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}E = \frac{1-\cos^2\frac{1}{2}a-\cos^2\frac{1}{2}b-\cos^2\frac{1}{2}c+2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\frac{1}{2}f};$$

e poichè il numeratore resulta dalla moltiplicazione del trinomio

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}c+\cos\frac{1}{2}b-\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c$$

pel trinomio

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}c-\cos\frac{1}{2}b+\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c$$

il primo de' quali è uguale a

$$\cos\frac{1}{2}b - \cos\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c\right)$$

l'altro è uguale a

$$\cos\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c\right) - \cos\frac{1}{2}b$$

risolvendo queste differenze di coseni in fattori, e ponendo $a+b+c=2p$, sarà

$$\tan\frac{1}{4}E = \frac{4\,\mathrm{sen}\frac{1}{2}p\,\mathrm{sen}\frac{1}{2}(p-a)\,\mathrm{sen}\frac{1}{2}(p-b)\,\mathrm{sen}\frac{1}{2}(p-c)}{\frac{1}{2}f}$$

ovvero, sostituendo il valore di f (n.° 211, VII)

$$\tan\frac{1}{4}E$$

$$= 4\,\frac{\mathrm{sen}\frac{1}{2}p}{\sqrt{\mathrm{sen}\,p}}\cdot\frac{\mathrm{sen}\frac{1}{2}(p-a)}{\sqrt{\mathrm{sen}\,(p-a)}}\cdot\frac{\mathrm{sen}\frac{1}{2}(p-b)}{\sqrt{\mathrm{sen}\,(p-b)}}\cdot\frac{\mathrm{sen}\frac{1}{2}(p-c)}{\sqrt{\mathrm{sen}\,(p-c)}}$$

ma

$$\frac{\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}m}{\mathrm{sen}\,m} = \frac{\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}m}{2\,\mathrm{sen}\frac{1}{2}m\cos\frac{1}{2}m} = \frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}m,$$

dunque

$$\tan E = \sqrt{\left[\tan\frac{1}{2}p\tan\frac{1}{2}(p-a)\tan\frac{1}{2}(p-b)\tan\frac{1}{2}(p-c)\right]} \quad \text{(XVI)}$$

questa è la formula di Lhuillier rimarchevole per la sua simmetrica composizione.

PROBLEMA VI.

219. Trovare la superficie del quadrilatero sferico di cui

due lati sono perpendicolari alla base, essendo data la base, e i lati medesimi.

Sia ABC (fig. 58) un triangolo sferico descritto sulla superficie della sfera di cui S è il centro: prolungano i lati BA, CA sino al quarto di cerchio, e conducendo l' arco di circolo massimo PQ è chiaro che la superficie del triangolo isoscele PAQ, birettangolo, sarà indicata dall'angolo A, ovvero dall' arco $PQ = e$: e perchè togliendo dall'area $APQ = e$ l'area $ABC = A + B + C - 180^\circ$ resta il quadrilatero sferico BPQC di cui due lati BP, CQ sono perpendicolari alla base PQ, chiamando quest' area Q avremo

$$Q = 180^\circ - (B + C)$$

$$\frac{1}{2} Q = 90^\circ - \frac{1}{2}(B + C)$$

talmentechè sarà

$$\cot \frac{1}{2} Q = \tang \frac{1}{2}(B + C) = \frac{\cos \frac{1}{2}(b - c)}{\cos \frac{1}{2}(b + c)} \cot \frac{1}{2} e$$

e facendo $CQ = \beta$, $BP = \gamma$ ed osservando che

$$b = 90^\circ - \beta, \; c = 90^\circ - \gamma,$$

$$\frac{1}{2}(b - c) = -\frac{1}{2}(\beta - \gamma); \; \frac{1}{2}(b + c) = 90^\circ - \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$$

otterremo la seguente formula

$$\cot \frac{1}{2} Q = \frac{\cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\beta + \gamma)} \cot \frac{1}{2} e$$

ovvero

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}Q = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}\operatorname{tang}\frac{1}{2}e \qquad \text{(XVIII)}$$

PROBLEMA VII.

220. Determinare la posizione del polo d'un circolo circoscritto ad un triangolo sferico di cui sono dati i lati.

Sia MN (fig. 68) il profilo del circolo circoscritto al triangolo sferico, ovvero al triangolo formato dalle corde de' suoi lati. Dal centro S della sfera abbassiamo un raggio perpendicolare al piano di detto circolo; esso passerà pel suo centro, e incontrerà la superficie sferica in P che sarà il polo del circolo medesimo; adunque $PM = \phi$ sarà la distanza da determinarsi.

È manifesto che

$$MO = r' = \operatorname{sen}\phi,\ SO = \cos\phi.$$

Or facendo per brevità

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b\operatorname{sen}\frac{1}{2}c = m$$

dalla formula (1) avremo

$$r' = \operatorname{sen}\phi = \frac{4m}{\sqrt{(f^2+16m^2)}}$$

$$\cos\phi = \sqrt{(1-\operatorname{sen}^2\phi)} = \frac{f}{\sqrt{(f^2+16m^2)}};\ \operatorname{tang}\phi = \frac{4m}{f};$$

e quindi, sostituendo ad m la sua espressione,

$$\operatorname{tang}\phi = \frac{4\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b\operatorname{sen}\frac{1}{2}c}{f} \qquad \text{(XIX)}$$

PROBLEMA VIII.

221. Trovare la solidità d'una piramide triangolare, essendone date tre costole concorrenti ad un medesimo vertice, ed i tre angoli che esse fanno tra loro.

Si osservi che $OS = \cos\phi$ esprime l'altezza della piramide che avendo la sua sommità nel centro della sfera ha per base il triangolo fatto dalle corde; essendo la superficie di questo triangolo t (n.° 212, VIII) se indichiamo con V la solidità di essa piramide, avremo

$$V = \frac{2 \operatorname{sen}\frac{1}{2} a \operatorname{sen}\frac{1}{2} b \operatorname{sen}\frac{1}{2} c}{3 \operatorname{tang}\phi}$$

ovvero

$$V = \frac{1}{6} f \qquad \text{(XX)}$$

Posto ciò all'oggetto di risolvere il problema proposto supponiamo che la piramide di cui vuolsi la solidità sia SMLK (fig. 69), e che le costole date sieno $SK = m$, $SL = n$, $SM = p$ e gli angoli dati sieno LSM, KSM, KSL, misurati respettivamente dai lati a, b, c del triangolo sferico MAB descritto sulla sfera di cui S è il centro. Abbassando dal punto M una perpendicolare sul piano opposto, e chiamando θ l'angolo d'inclinazione della retta MS sul piano LSK, sarà $MP = p \operatorname{sen}\theta$; e poichè la superficie della base SLK è indicata da $\frac{1}{2} nm \operatorname{sen} a$, avremo la solidità della piramide dalla formula

$$V' = \frac{1}{6} m n p \operatorname{sen} a \operatorname{sen}\theta,$$

Ora osservando che questo valore dee risultare identico con quello di V (xx) quando si faccia $m = n = p = 1$, è manifesto che dovrà essere $\operatorname{sen} a \operatorname{sen} \theta = f$; perlochè avremo

$$V' = \frac{1}{6} m n p f \qquad \text{(xxi)}$$

PROBLEMA IX.

222. Trovare la solidità d'una piramide triangolare essendone date le sei costole.

Essendo come nel problema precedente $SK = m$, $SL = n$, $SM = p$, pongasi $ML = m'$, $MK = n'$, $KL = p'$.

I triangoli MSL, MSK, LSK, daranno le seguenti equazioni,

$$m'^2 = n^2 + p^2 - 2np\cos a$$
$$n'^2 = m^2 + p^2 - 2mp\cos b$$
$$p'^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos c$$

dalle quali si avranno i valori di $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$, che sostituiti nella espressione di f (n.° 211, ii) cambieranno l'espressione medesima in una funzione delle sei costole della piramide; e facendo

$$n^2 + p - m'^2 = M, \; m^2 + p^2 - n'^2 = N, \; m^2 + n^2 - p'^2 = P,$$

facilmente ricaveremo dalla (n.° 221, xxi) questa formula

$$V' = \frac{1}{2}\sqrt{(4n^2m^2p^2 - m^2M^2 - n^2N^2 - p^2P^2 + MNP)} \qquad \text{(xxii)}$$

PROBLEMA X.

223. Trovare il raggio della sfera iscritta, e quello della sfera circoscritta ad una piramide data.

Una piramide s'intende circoscritta ad una sfera ogniqualvolta le sue facce sono tangenti alla sfera medesima; viceversa la sfera dicesi in tal caso iscritta nella piramide. Pertanto il centro della sfera iscritta sarà un punto equidistante dalle facce della piramide. Ciò posto se si suppone che dal centro della sfera iscritta sieno condotte quattro rette ai vertici della piramide, sarà facile concepire la piramide stessa divisa in quattro piramidi aventi per basi le sue quattro facce, e la sommità comune nel centro della sfera: ora l'altezza di ciascuna piramide parziale sarà uguale al raggio della sfera medesima; adunque se con S rappresentiamo la somma dei quattro triangoli che costituiscono la superficie della piramide data, e con ρ il raggio della sfera avremo

$$V' = \frac{1}{3} \rho S$$

e quindi

$$\rho = \frac{3V'}{S} \qquad \text{(XXIII)}$$

Quando fosser date le sei costole della piramide, V' potrebbe determinarsi mediante la precedente formula (XXI) e le aree de' triangoli la di cui somma è indicata da S potrebbero ricavarsi dalla formula (IV) n.° 139.

224. Una piramide s'intende iscritta in una sfera quando tutti i suoi vertici si trovano a contatto della superficie interna di essa sfera; viceversa la sfera dicesi in tal caso circoscritta alla piramide. Pertanto il centro della sfera circoscritta ad una piramide sarà un punto ugualmente distinta dai quattro vertici della piramide stessa. Or questo centro facilmente si determina mediante la seguente costruzione.

Sia LMKS (fig. 70) una piramide; P e Q i centri dei circoli circoscritti ai triangoli SLK, SMK, e PO, QO due perpendicolari innalzate sopra le due facce SLK, SMK. È manifesto che i centri P e Q debbonsi trovare su le rette DP, DQ perpendicolari a KS nel punto di mezzo D, la prima posta nel piano SLK, l'altra posta nel piano SMK: per conseguenza le due rette PO, QO essendo nello stesso piano PDQ perpendicolare a KS, debbono necessariamente incontrarsi; ed il punto O della loro intersezione sarà il centro della sfera circoscritta; infatti O come appartenente alla perpendicolare PO è ugualmente distante dai punti SLK, e come appartenente alla perpendicolare QO è ugualmente distante dai punti S, M, K; conseguentemente esso è ugualmente distante dai quattro punti K, L, M, S.

Posto ciò, all'oggetto di determinare la distanza $OS = \rho'$ osserveremo che il triangolo rettangolo OSD dà

$$\rho'^2 = \overline{DS}^2 + \overline{OD}^2 \qquad (A)$$

e poichè $DS = \frac{m}{2}$, ci limiteremo a determinare OD.

Dal triangolo ODP abbiamo

$$\overline{OD}^2 = \overline{DP}^2 + \overline{OP}^2$$

e ponendo $PDQ = D$ sarà

$$OP = PG \cot D = (GD - DP) \cot D;$$

e poichè

$$GD = \frac{DQ}{\cos D}$$

avremo

$$OP = \frac{DQ - DP \cos D}{\operatorname{sen} D}$$

e conseguentemente

$$\overline{OD}^2 = \frac{\overline{DP}^2 + \overline{DQ}^2 - 2\,DP.DQ.\cos D}{\operatorname{sen}^2 D} \qquad (B)$$

Indicando gli angoli LSM, KSM, KSL con le lettere a, b, c respettivamente, è chiaro che a, b, c si potranno considerare come i lati d'un triangolo sferico di cui D è un angolo compreso tra b, e c, cosicchè sarà (n.° 179, I e n.° 211, IV)

$$\cos D = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}, \quad \operatorname{sen} D = \frac{f}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}.$$

Ora sul piano LKS conducasi la retta EF perpendicolare ad LS nel punto di mezzo E; è manifesto che questa perpendicolare passerà pel punto P. Quindi sarà

$$DP = DF \cot c = (SF - SD) \cot c,$$

e poichè

$$SF = \frac{n}{2 \cos c}, \quad SD = \frac{m}{2},$$

avremo

$$DP = \frac{n - m \cos c}{2 \operatorname{sen} c}$$

e con un calcolo analogo al precedente, avremo pure

$$DQ = \frac{p - m \cos b}{2 \operatorname{sen} b}$$

Laonde se nella formula (B) si sostituiscono i valori di cos D, sen D, DP, DQ, otterremo tal valore di OD che posto nella formula (A) col valore di DS darà la seguente espressione di ρ'; nella quale si è fatto per brevità

$$\cos a - \cos b \cos c = A$$

$$\cos b - \cos a \cos c = B$$

$$\cos c - \cos a \cos b = C;$$

$$\rho' = \sqrt{\frac{(m^2 \operatorname{sen}^2 a + n^2 \operatorname{sen}^2 b + p^2 \operatorname{sen}^2 c - 2mnC - 2mpB - 2npA)}{2f}} \quad (\text{xxiv})$$

Mediante questa formula potremo trovare il raggio della sfera circoscritta ad una piramide essendone date tre costole concorrenti ad un medesimo vertice, e gli angoli che esse fanno tra loro.

PROBLEMA XI.

225. Determinare la solidità d'un parallelepipedo, essendone date le tre costole e gli angoli che esse formano tra loro.

Le tre costole del parallelepipedo sieno indicate con m, n, p e gli angoli (n, p), (m, p), (m, n) sieno respettivamente rappresentati da a, b, c. È manifesto che questo parallelepipedo, doppio del prisma triangolare costrutto su le costole m, n, p formanti tra loro gli angoli a, b, c, sarà il sestuplo della piramide triangolare di cui m, n, p sono parimente tre costole concorrenti in uno stesso vertice, ed a, b, c gli angoli da esse formati. Adunque indicando con P la solidità del parallelepipedo di cui si tratta, avremo

$$P = mnpf \qquad (\text{xxv})$$

PROBLEMA XII.

226. Determinare la diagonale d'un parallelepipedo che unisce due vertici opposti, conoscendo le sue costole e gli angoli che esse formano tra loro.

Essendo il parallelepipedo quello che ci presenta la figura 71, ove gli angoli formati dalle date costole $SK = m$,

$SL = n$, $SM = p$ sono misurati dagli archi dati $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, ci proporremo di determinare la retta $SO = \Delta$.

I triangoli obliquangoli SON, SLN danno

$$\overline{SO}^2 = \overline{ON}^2 + \overline{SN}^2 + 2\,ON.SN.\cos MSN$$

$$\overline{SN}^2 = \overline{SL}^2 + \overline{LN}^2 + 2\,SL.LN.\cos LSK$$

donde si ha

$$\Delta^2 = m^2 + n^2 + p^2 + 2mn\cos c + 2p.SN.\cos CP \quad (A)$$

per cui si vede che il calcolo si riduce a determinare $\cos CP$, essendo SN data dalla seconda equazione; il seguente calcolo ci esime però dalla sostituzione del valore di SN che l'equazione medesima ci somministra. Osservisi che

$$\cos CP = \cos a \cos BP + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} BP \cos B$$

e poichè

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c}$$

fatta la sostituzione ne conseguirà

$$\cos CP = \frac{\operatorname{sen} BP}{\operatorname{sen} c} \cos b + \frac{\operatorname{sen}(c - BP)}{\operatorname{sen} c} \cos a.$$

Ma i triangoli SLN, SKN danno

$$\frac{\operatorname{sen} BP}{\operatorname{sen} c} = \frac{m}{SN}, \quad \frac{\operatorname{sen}(c - BP)}{\operatorname{sen} c} = \frac{n}{SN},$$

perciò

$$\cos CP = \frac{m\cos G + n\cos a}{SN}$$

il qual valore posto nella equazione (A) dà luogo alla seguente formula;

$$\Delta^2 = m^2 + n^2 + p^2 + 2mn\cos c + 2mp\cos b + 2np\cos a \quad (\text{XXVII})$$

APPENDICE

TEORIA ANALITICA DEI LOGARITMI

1. Volendo considerare questa teoria nel suo più generale concetto, bisogna concepire l'idea dei numeri artificiali così detti *logaritmi*, e che si sostituiscono ai numeri naturali per semplicizzare i calcoli, paragonando due progressioni qualunque l'una geometrica, l'altra aritmetica, in guisa che il primo termine dell'una corrisponda al primo termine dell'altra, il secondo al secondo, il terzo al terzo, ec.; indi bisogna dedurre da tale corrispondenza le proprietà fondamentali dei logaritmi medesimi.

I. *Nozione d'un sistema di logaritmi.*

2. La progressione geometrica sia per esempio questa:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \text{ec.}$$

e la progressione aritmetica sia

$$4, 10, 16, 22, 28, 34, \text{ec.}$$

ciascun numero della progressione aritmetica è il *logaritmo* del numero che occupa il medesimo posto nella progressione geometrica. I numeri adunque che chiamansi logaritmi, sono i termini d'una progressione aritmetica corrispondenti a numeri i quali sono i termini d'una progressione geometrica.

3. Essendo arbitraria la scelta delle due progressioni, potremo indicare il seguito dei numeri coi termini

$$1, a, a^2, a^3, a^4, \ldots$$

ed il seguito dei respettivi logaritmi coi termini

$$u, u+d, u+2d, u+3d, u+4d, \ldots$$

talmentechè posto che a^n sia in generale un numero, $u+nd$ sarà il suo rispettivo lagaritmo: perciò scriveremo

$$\log a^n = u + nd$$

4. Supponendo che a sia un numero intero, i numeri ed i respettivi logaritmi anderanno successivamente crescendo, qualunque siano d'altronde u e d.

5. Pertanto è manifesto che uno stesso numero ha un'infinità di logaritmi; infatti ai termini di una medesima progressione geometrica si possono far corrispondere quelli d'infinite progressioni aritmetiche tutti differenti fra loro; la progressione geometrica può cambiarsi anch'essa in una infinità di maniere; vi sono dunque infiniti *sistemi* di logaritmi: intendendo che formino un sistema tutti quelli desunti da due progressioni, determinate da un valore particolare di u, di a, ~~di~~ d; u è il numero che assumesi per logaritmo dell'unità; a è la ragione della progressione geometrica, e si chiama *base* del sistema; d è la differenza della progressione aritmetica.

Le due progressioni poste qui sopra (2), appartengono al sistema in cui 4 è il logaritmo dell'unità, 2 la base, e 6 la differenza della progressione aritmetica.

6. Quando tra i termini delle due progressioni si volesse maggiore continuità, bisognerebbe cominciare con inserire un medio geometrico tra 1 ed a, il quale è $\sqrt{a}$; un

medio geometrico tra a ed a^2, $a\sqrt{a}$, uno tra a^2 ed a^3, $a^2\sqrt{a}$, ec., ed in tal caso la progressione procederebbe secondo la ragione $\sqrt{a}$. Il logaritmo di $\sqrt{a}$ sarebbe il medio aritmetico tra u ed $u+d$, cioè $u+\frac{1}{2}d$; il logaritmo di $a\sqrt{a}$ sarebbe il medio aritmetico tra $u+d$ ed $u+2d$, cioè $u+\frac{3}{2}d$; il logaritmo di $a^2\sqrt{a}$ sarebbe $u+\frac{5}{2}d$; ec.; di maniera che la progressione aritmetica procederebbe secondo la differenza uguale ad $\frac{1}{2}d$. Quindi ripetendo sulle due risultanti progressioni il calcolo medesimo, si avrebbero altre due progressioni, la prima delle quali procederebbe secondo la ragione $\sqrt[4]{a}$, l'altra secondo la differenza $\frac{1}{4}d$. S'intende che non vi può esser limite che arresti questa operazione: ond'è che si possono ristringere, per così dire, i numeri della progressione geometrica quanto vogliamo, e determinare senza difficoltà i corrispondenti logaritmi.

7. Si avverta che questa operazione non cambia la base del sistema al quale appartengono le due progressioni sulle quali essa si fa: poichè sebbene la ragione a della progressione geometrica iniziale venga di mano in mano cambiata in $\sqrt{a}$, $\sqrt{\sqrt{a}}$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$, ec., i termini di qualsivoglia progressione alla quale piaccia fermare il calcolo saranno sempre potenze intere o fratte di a.

$$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}},\ \sqrt{\sqrt{a}}=a^{\frac{1}{4}},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}=a^{\frac{1}{8}},\ \text{ec.}$$

questi termini, poichè saranno generalmente irrazionali, non si potranno avere che per approssimazione.

II. *Proprietà generali dei logaritmi.*

8. I logaritmi hanno proprietà generali indipendenti dal particolare sistema cui si riferiscono. Bensì tali proprietà vanno soggette ad alcune modificazioni per certi valori di u, d, a, come mostreremo in appresso: intanto passiamo a dimostrarle prescindendo da ogni particolare considerazione.

1.° Poichè

$$a^n \times a^{n'} = a^{n+n'}$$

$$\log a^n = u + nd, \ \log a^{n'} = u + n'd,$$

$$\log a^{n+n'} = u + (n+n')d,$$

segue che

$$\log a^n \times a^{n'} = \log a^n + \log a^{n'} - \log 1$$

donde si vede che il prodotto di due numeri ha per logaritmo la somma dei logaritmi di essi numeri, diminuita del logaritmo dell'unità. Perciò

$$\log a^n \times a^{n'} \times a^{n''} = \log a^n + \log a^{n'} + \log a^{n''} - 2 \log 1$$

ed in generale il logaritmo d'un prodotto è la somma dei logaritmi dei suoi fattori meno tante volte il logaritmo dell'unità quanti sono i fattori medesimi meno uno.

2.° Poichè

$$\frac{a^n}{a^{n'}} = a^{n-n'}$$

$$\log a^{n-n'} = u + (n-n')d;$$

segue che

$$\log \frac{a^n}{a^{n'}} = \log a^n - \log a^{n'} + \log 1$$

cosicchè il quoziente di due numeri ha per logaritmo l'eccesso del logaritmo del dividendo su quello del divisore accresciuto del logaritmo dell'unità.

3.° Poichè

$$(a^n)^g = a^{ng}$$

$$\log a^{ng} = u + gnd$$

osservando che da

$$\log a^n = u + nd$$

si deduce

$$g \log a^n = gu + gnd$$

e quindi

$$g \log a^n - (g-1)u = u + gnd$$

segue che

$$\log (a^n)^g = g \log a^n - (g-1) \log 1,$$

donde si vede che il logaritmo della potenza d'un numero è uguale al logaritmo del numero stesso moltiplicato pel grado della potenza, e quindi tante volte diminuito del logaritmo dell'unità quant'è il grado stesso meno uno.

4.° Poichè

$$\sqrt[g]{a^n} = a^{\frac{n}{g}}$$

$$\log a^{\frac{n}{g}} = u + \frac{n}{g} d$$

osservando che da

$$\log a^n = u + nd$$

si deduce

$$\frac{\log a^n}{g} = \frac{u}{g} + \frac{nd}{g}$$

$$\frac{\log a^n}{g} + (g-1)\frac{u}{g} = u + \frac{u}{g}\,d;$$

segue

$$\log \sqrt[g]{a^n} = \frac{\log a^n}{g} + (g-1)\frac{\log 1}{g}$$

e di qui risulta che il logaritmo della radice d'un numero è uguale al logaritmo del numero stesso diviso pel grado della radice e quindi tante volte accresciuto del logaritmo dell'unità moltiplicato pel grado della radice meno uno, e diviso pel grado medesimo.

9. Ed è pertanto manifesto che col soccorso d'una tavola in cui si trovassero i logaritmi di tutti i numeri calcolati sopra un sistema qualunque potrebber determinarsi i prodotti, i quozienti, le potenze e le radici dei numeri indipendentemente dalle pratiche che l'aritmetica ci suggerisce a tal uopo.

Per esempio, adottato il sistema in cui

$$u = 4,\ a = 2,\ d = 6\ (2)$$

se vorremo il prodotto di 4 e 8 cercheremo i loro logaritmi, e fattane la somma, ne sottrarremo il logaritmo dell'unità; poi cercheremo il numero corrispondente al logaritmo che ne risulta; esso numero sarà il prodotto richiesto.

$$\begin{array}{ll} \log 4 = & 16 \\ \log 8 = & 22 \\ \hline \text{somma} & 38 \\ \log 1 = & 4 \\ \hline \text{resto} & 34 = \log 32 \end{array}$$

dunque $4 \times 8 = 32$

Se vorremo il quoziente di 32 diviso per 8, cercheremo i logaritmi di questi nnmeri, dal logaritmo del dividendo sottrarremo quello del divisore, ed al resto aggiungeremo il logaritmo dell'unità; quindi cercheremo il numero corrispondente al logaritmo che ne risulta, e questo numero sarà il quoziente richiesto.

$$\log 32 = 34$$
$$\log 8 = 22$$
$$\text{resto } 12$$
$$\log 1 = 4$$
$$\text{somma } 16 = \log 4$$

dunque $32 : 8 = 4$

Se vorremo la quinta potestà del 2, moltiplicheremo il logaritmo del 2 per 5 e ne sottrarremo il logaritmo dell'unità preso 4 volte; il numero corrispondente al logaritmo che ne risulta sarà la potestà richiesta.

$$\log 2 = 10$$
$$5$$
$$\log 1 = 4 \text{ prodotto } 50$$
$$4$$
$$\text{prodotto } 16$$
$$16$$
$$\text{resto } 34 = \log 32$$

dunque $2^5 = 32$.

Se vorremo finalmente la radice quarta di 16, diviso il logaritmo di 16 per 4, aggiungeremo al quoziente il logaritmo dell'unità preso 3 volte; il numero corrispondente al logaritmo che ne risulta sarà la potenza richiesta.

$$\log 16 = 28$$

$$28 : 4 = 7$$

$$\log 1 = 4$$

$$\underline{3}$$

prodotto $12 : 4 = 3$ $\quad \underline{3}$

somma $10 = \log 2$

dunque $\sqrt[4]{16} = 2$

III. *Ipotesi di* $\log 1 = 0$

10. Ciò posto, bisognerebbe procedere alla costruzione d'una tavola di logaritmi: ma poichè u, a, d sono arbitrarie, primieramente è necessario vedere come ne dobbiamo disporre affinchè il calcolo della tavola risulti spedito, e l'uso della medesima quanto si può comodo e facile.

Perciò in primo luogo porremo

$$\log 1 = 0$$

ed allora i logaritmi corrispondenti ai numeri

$$1, a, a^2, a^3, a^4, \ldots$$

divengono $\quad 0, d, 2d, 3d, 4d, \ldots$

ed in generale $\log a^n = nd$.

11. Quindi le proprietà dimostrate (8), nell'ipotesi di $\log 1 = u$ si cambiano nelle seguenti

1.° Il prodotto $a^n \times a^{n'}$ ha per logaritmo $(n + n')\,d$, cioè la somma dei logaritmi dei fattori: qualunque sia il numero dei fattori medesimi.

2.° Il quoziente $a^n : a^{n'}$ ha per logaritmo $(n - n')\,d$, cioè

l'eccesso del logaritmo del dividendo su quello del divisore.

3.° La potenza $(a^n)^g$ ha per logaritmo gnd, cioè il logaritmo del numero a^n moltiplicato pel grado g della potenza.

4.° La radice $\sqrt[g]{a^n}$ ha per logaritmo $\frac{nd}{g}$, cioè il logaritmo del numero a^n diviso pel grado g della radice.

Queste proprietà sono particolari al sistema in cui $\log 1 = 0$, ma indipendenti dal valore di a e d, cioè indipendenti dalla *base e dal suo logaritmo*.

IV. *Ipotesi di* $\log a = 1$

12. Il proposito nostro, che è quello di adottare il più semplice sistema di logaritmi e di calcolare una tavola dietro di esso, vuole che si ponga $d = 1$, ossia $\log a = 1$; chè allora i logaritmi corrispondenti ai numeri

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ \ldots$$

divengono

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

$$\log a^2 = 2,\ \log a^3 = 3,\ \text{ec.},\ \log a^n = n.$$

Si vede che in tal concetto (cioè nell'ipotesi di $\log a = 1$, $\log 1 = 0$) *il logaritmo d'un numero è il grado della potenza alla quale conviene elevare la base per ottenere il numero medesimo. In questo sistema la base è quella quantità assunta arbitraria in origine, ma poi tenuta costantemente fissa per trasformare nelle sue potestà tutti i numeri.*

Sia la base $= 2$; i logaritmi dei numeri 16, 64, 1024, che trasformati in potestà del 2 danno

$$16 = 2^4,\ 64 = 2^6,\ 1024 = 2^{10}$$

saranno respettivamente 4, 6, 10. Che se la base fosse $=4$, i logaritmi dei numeri medesimi, che trasformati in potestà del 4 danno $16=4^2, 64=4^3, 1024=4^5$, sarebbero respettivamente 2, 3, 5.

13. Per trovare i logaritmi corrispondenti ai numeri 1, 2, 3, 4, ec., è d'uopo determinare gli esponenti interi o fratti che bisogna dare alla base a affinchè ne risultino questi numeri; ond'è che converrebbe risolvere l'equazione $a^x=y$ per rapporto ad x, ponendo successivamente

$$y=2, =3, =4, =5, \text{ec.};$$

noi però giungeremo ai medesimi risultati con altro espediente.

14. Ma prima di effettuare questi calcoli sopra una data base numerica, osserviamo che non possono essere interi che i logaritmi dei numeri uguali alle potestà intere della base; gli altri o sono fratti, o sono irrazionali e non si possono ottenere che per approssimazione. Se la base fosse $=4$, siccome

$$4^{\frac{1}{2}}=2, 4^{\frac{5}{2}}=32,$$

si vede che i logaritmi dei numeri 2, 32 sarebbero respettivamente $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}$.

In generale sia $\frac{m}{n}$ il logaritmo frazionario di b, sarà

$$a^{\frac{m}{n}}=b; \quad \frac{a^m}{b^n}=1;$$

donde si vede che a e b debbono avere necessariamente i medesimi fattori primi; sia

$$a = u^p v^q, b = u^r v^s$$

avremo

$$\frac{u^{mp} v^{mq}}{u^{nr} v^{ns}} = 1$$

e per conseguenza

$$mp = nr, \; mq = ns$$

donde segue che

$$\log b = \frac{m}{n} = \frac{r}{p} = \frac{s}{q};$$

il logaritmo d'un numero b si può adunque esprimere esattamente per una frazione, quando la base ed il numero medesimo sono composti dei medesimi fattori primi, ed i rapporti degli esponenti di questi fattori sono uguali fra loro. In tal caso questo rapporto medesimo è il logaritmo di b. Se i fattori della base fossero tutti alla prima potestà, $p = 1$, $q = 1$, allora sarebbe

$$\log b = r = s;$$

ond'è che m esser dovrebbe multiplo di n; cioè sarebbero razionali quei soli logaritmi che corrispondono alle potestà intere della base.

Se avessimo

$$a = 5084 = 2^6 . 3^4$$

sarebbe $\log 72 = \frac{1}{2}$, poichè

$$72 = 2^3 . 3^2, \; \frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Se fosse $a = b = 2.3$, sarebbe $\log 36 = \log 2^2 . 3^2 = 2$ e ciò è chiaro, poichè se gli esponenti dei fattori semplici del numero sono uguali, il numero è una potenza intera della base.

V. *Ipotesi* di $a = 10$.

15. Le tavole in uso sono state costruite sulla base $10, a = 10$; è stata data la preferenza a questo numero, perchè esso è la base del nostro sistema di numerazione, e perchè aggiunge altre rimarchevoli proprietà ai logaritmi. Essendo la base $a = 10 = 2 . 5$, tranne i logaritmi delle potestà di 10, cioè

$$10,\ 100,\ 1000,\ 10000, \ldots .$$

i quali sono $\quad 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots .$

tutti gli altri saranno irrazionali e conseguentemente non si potranno avere che per approssimazione. La parte intera d'un logaritmo chiamasi *caratteristica;* la parte fratta dicesi *mantissa*.

16. È facile dimostrare che la caratteristica d'un logaritmo preso in questo sistema contiene tante unità, quante cifre ha il numero cui corrisponde meno una. Sia P un numero compreso tra 10^n e 10^{n+1}; fra queste due potestà sono contenuti i numeri composti di $n+1$ cifre, i quali hanno i loro corrispondenti logaritmi tra n ed $n+1$, cioè del valore di n unità più una frazione da determinarsi per approssimazione: dunque la caratteristica di logaritmo P è n, cioè un numero di tante unità quante cifre ha P meno una.

In virtù di questa proprietà dei logaritmi calcolati sulla base 10, nella maggior parte delle tavole sono state tralasciate le caratteristiche; la mantissa è stata espressa in decimali con più o meno cifre secondo l'uso a cui queste tavole sono destinate; ordinariamente bastano sette cifre.

17. Altra proprietà dei logaritmi presi in questo siste-

ma si è che conoscendo il logaritmo d'un numero qualunque P, si ottiene quello del prodotto di P moltiplicato per qualunque potenza di 10, aggiungendo alla caratteristica di esso logaritmo tante unità quante ne sono nel grado della potenza stessa. Infatti (11)

$$\log 10^n P = \log 10^n + \log P = \log P + n$$

Reciprocamente dal logaritmo d'un numero P si deduce quello del quoziente P per qualunque potenza di 10, sottraendo dalla caratteristica tante unità quante ne contiene il grado di questa potenza. Infatti

$$\log \frac{P}{10^n} = \log P - \log 10^n = \log P - n$$

VI. *Costruzione delle tavole.*

18. Ora che abbiamo assegnati ad u, a e d i valori più opportuni al calcolo dei logaritmi, passeremo a dire alcuna cosa intorno alla costruzione delle tavole. A tal oggetto ci varremo del principio indicato (6) in virtù del quale si possono render continui quanto più ne piace i termini delle due progressioni.

Proponiamoci di determinare il logaritmo d'un numero, per esempio 5.

Poichè 5 si trova fra 1 e 10, il suo logatitmo dovrà trovarsi fra 0 e 1: inseriscasi pertanto un medio geometrico fra 1 e 10, ed un medio aritmetico fra 0 ed 1; il primo sarà 3,1622776, il secondo 0,5. Ora si vede chiaro che il numero dato 5 cade fra 3,1622776 e 10, ed il suo logaritmo fra 0,5 ed 1: perciò inseriscasi un medio geometrico fra 3,1622776 e 10, ed un medio aritmetico fra 0,5 ed 1;

il primo è 5,6234113, l'altro 0,75. Or poichè 5 trovasi fra 3,1622776 e 5,6234113, il suo logaritmo si troverà fra 0,5 e 0,75: cercheremo il medio geometrico contenuto fra 3,1622776 e 5,6234113, ed il medio aritmetico contenuto fra 0,5 e 0,75.

Procedendo in questo modo, i due medj aritmetici fra i quali è compreso il logaritmo di 5 andranno successivamente avvicinandosi; la differenza loro potrà adunque divenire più piccola di qualunque quantità data; e volendo per esempio, che essa sia $<$0,0000001, non ci arresteremo nel calcolo, se non quando i logaritmi de' due medj geometrici fra cui 5 è compreso, avranno le prime 7 cifre decimali comuni: perchè allora sostituito il 5 ad uno di essi medj, e preso il logaritmo di questo per il logaritmo cercato di 5, non si giunge a commettere un errore di 0,0000001, e s'ha un' approssimazione sufficiente per la maggior parte dei calcoli in cui si fa uso dei logaritmi.

19. Calcolati con tal metodo i logaritmi dei numeri primi, i logaritmi degli altri numeri che risultano dalla moltiplicazione di essi si troveranno senza difficoltà, non potendo essere che somme o differenze di logaritmi già ottenuti. I soli logatitmi de' numeri 3, 5, 7, bastano a darci tutti quelli de' numeri compresi tra 1 e 10 e delle loro potestà, e di tutti i prodotti che si possono formare con essi tra loro, e con le potestà medesime. Infatti è chiaro che

$$\log 2 = \log 10 - \log 5,$$
$$\log 4 = 2 \log 2,$$
$$\log 6 = \log 2 + \log 3,$$
$$\log 8 = 3 \log 2,$$
$$\log 9 = 2 \log 3.$$

20. Occorrendo di farci un'idea chiara di queste tavole, faremo osservare che la costruzione di esse effettuata nel modo che abbiamo indicato, suppone che siasi inserito un gran numero di medj aritmetici fra 0 ed 1, per esempio $1677216 = 2^{24} > 1000000$; un ugual numero fra 1 e 2, fra 2 e 3, ec.; chè in questo modo si ha una progressione aritmetica la di cui differenza è $< 0,0000001$; quindi suppone, che uno stesso numero di medj geometrici siasi inserito tra 1 e 10, tra 10 e 100, fra 100 e 1000, ec.; chè così si ha una progressione geometrica i cui termini sono sempre le differenti potenze intere e fratte di 10 (7).

In virtù di questa operazione si ottiene un seguito indefinito di logaritmi razionali, che procedono secondo una differenza costante minore di 0,0000001, coi respettivi numeri cui corrispondono.

Vero è che fra questi numeri non se ne troverà alcuno che sia uguale a 2, 3, ... 9; 11, 12 ... 99; ec., poichè in tal caso esso avrebbe logaritmo razionale, contro il principio dimostrato (14); ma nondimeno si sostituiscono questi numeri ai medj geometrici che sono ad essi più prossimi, e si prendono per loro logaritmi i logaritmi medesimi di essi medj, certi di non commettere che un errore minore di 0,0000001. Avendo fatta tale sostituzione, si vede che propriamente non si conoscono i logaritmi dei numeri 2, 3, 4 .... n, se non quando sono potestà della base: degli altri numeri i quali non soddisfanno a queste condizioni non si hanno i logaritmi; e quelli che si prendon per tali sono i logaritmi dei numeri che differiscono da questi di una quantità che può esser piccola quanto vogliamo, ma non può mai diventare 0. In conseguenza di ciò è stato

detto (*) che il logaritmo di un numero è in generale una quantità trascendente, poichè non può essere espressa razionalmente, nè irrazionalmente; abbiam già veduto che non può esserlo razionalmente (14); e neppure irrazionalmente, poichè non si può dare alcuna formula finita implicata d'irrazionali, se vogliamo che somministri l'espressione algebrica del logaritmo di un numero, dalla quale il valore del logaritmo di un numero possa ricavarsi per approssimazione; infatti indicando con l il logaritmo irrazionale del numero n, sarebbe $a^l = n$; equazione la quale non può verificarsi, stantechè a e n si suppongono razionali. Quindi si estraggono dalla progressione geometrica i numeri 1, 2, 3, 4, ec., e dall'aritmetica i corrispondenti logaritmi, 0; 0,3010299; 0,4771812; 0,6020599; 0,6989700; ec., e tutti gli altri termini dell'una e dell'altra, che han servito ad ottenere questo risultato, si rigettano.

I numeri si dispongono in colonne allato dei rispettivi logaritmi; lungi dunque dal vedere nella colonna dei numeri una progressione geometrica, o le successive potestà intere, o fratte d'un numero costante quale si è la base; e nella colonna dei logaritmi una progressione aritmetica; stantechè sono stati rigettati nell'una e nell'altra moltissimi termini medj, non vedremo la progressione geometrica che nei soli numeri 10, 100, 1000, ec., e la progressione aritmetica soltanto nei loro respettivi logaritmi 1, 2, 3, ec.

È inutile osservare che ciò non rende in alcun modo erroneo l'uso che saremo per fare di questa tavola, perchè riepilogando l'operazione che abbiamo fatta per costruirla,

(*) Paoli T. I, pag. 159.

potremo dire che indicato il seguito dei numeri in progressione geometrica con

$$1, n, n', n'', n''', n^{IV}, \ldots.$$

ed il seguito dei corrispondenti logaritmi con

$$0, l, l', l'', l''', l^{IV}, \ldots.$$

se n, n'', n^{IV}, ec., sono i numeri che più si approssimano a 2, 3, 4, ec., l'opera nostra consiste nell'estrarre dalla progressione geometrica i termini 1, n, n'', n^{IV}, ec., e dalla aritmetica i logaritmi corrispondenti 0, l, l'', l^{IV}, ec., (lo che nulla toglie alle proprietà di cui godono i logaritmi rispetto a' loro numeri) e nel sostituire ad n il 2, ad n'' il 3, ad n^{IV} il 4, ec.; e qui ben è vero che si commette un errore, ma quando l'approssimazione si porta sino alle cifre decimali del settimo ordine, esso errore è sì piccolo, che può liberamente trascurarsi.

21. Si osservi che nelle tavole la differenza di due successivi logaritmi è tanto più piccola, quanto più grandi sono i numeri cui essi logaritmi appartengono; infatti è chiaro che dei $16777216 = 2^{24}$ medj inseriti tra 1 e 10 ne conserviamo soli 8; dei 16777216 inseriti tra 10 e 100 ne conserviamo 89; dei 16777216 inseriti fra 100 e 1000 ne conserviamo 899, ec.; così a misura che i numeri crescono, diminuisce il numero dei medj che vengono rigettati; lo stesso dee avvenire rispetto ai logaritmi; dunque la differenza di 2 logaritmi consecutivi tanto più sarà piccola, quanto più grandi saranno i numeri cui essi logaritmi appartengono.

22. Questa differenza per tutti i numeri maggiori di 10000 non è sensibile, che alla quinta cifra decimale. Infatti

$$\log 10001 = 4,0000434$$
$$\log 10000 = 4,0000000$$
$$D = 0,0000434$$

talmentechè si può dire, che la differenza di due logaritmi consecutivi corrispondenti ai numeri maggiori di 10000 è minore d'una metà di un diecimillesimo.

23. Un'osservazione da farsi si è che non conservando d'un logaritmo che le prime sette cifre decimali, le differenze si mantengono costanti dentro certi limiti.

Per esempio da log 10000 a log 10015 D si mantiene sulle tavole uguale a 0,0000434; donde apparisce che l'errore che si commette, considerando pei 15 logaritmi contenuti entro questi limiti D costantemente uguale a 0,0000434, è minore d'un diecimilionesimo. Da log 100000 a log 101000, D si mantiene sulle tavole uguale a 0,0000043, e qui pure si vede, che l'errore che si commette considerando D pei mille logaritmi compresi fra questi limiti costantemente uguale a 0,0000043, non giunge ad un diecimillesimo.

24. Da log 5000000 in poi D è minore di 0,0000001; lo che dimostra che la differenza non può manifestarsi nelle prime sette cifre decimali; ovvero che dopo il numero 5000000 i logaritmi hanno le prime sette cifre decimali comuni.

VII. *Uso delle tavole logaritmiche.*

25. Ci serviremo delle tavole di Gardiner ampliate e diligentemente impresse per cura del ch. P. Inghirami (*),

(*) Raccomandiamo ai giovani principianti di rendersi familiare l'uso delle tavole logaritmiche: l'edizione che qui citiamo è quella del 1827 pubblicata in Firenze coi tipi della stamperia Calasanziana.

nelle quali si trovano i logaritmi dei numeri da 1 a 108000, espressi con 7 cifre decimali. Ed in applicazione di quanto abbiamo detto fin qui, cominceremo con farne uso nelle operazioni elementari alle quali si può applicare il calcolo logaritmico; queste operazioni elementari sono la moltiplicazione, la divisione, l'innalzamento a potenze, e l'estrazione di radice.

Dalle proprietà che abbiamo dimostrate pei logaritmi presi nel sistema secondo il quale abbiamo supposto calcolata la tavola, risulta che

1.° Per avere il prodotto di due o più numeri, bisogna fare la somma dei loro logaritmi; quindi cercare il numero corrispondente al logaritmo uguale alla somma medesima; questo numero sarà il prodotto richiesto.

Sia il prodotto da determinarsi quello dei fattori 169,35,11.

$$\begin{array}{l} \log 169 = 2,2278867 \\ \log \ \ 35 = 1,5440680 \\ \log \ \ 11 = 1,0413927 \\ \hline \qquad\qquad 4,8133474 = \log 65065. \end{array}$$

Risulta che $169 \times 35 \times 11 = 65065$.

2.° Per avere il quoziente di due numeri, bisogna sottrarre dal logaritmo del dividendo quello del divisore; cercare il numero che ha per logaritmo il resto, questo numero è il quoziente voluto.

Debbasi dividere 60804 per 108;

$$\begin{array}{l} \log 60804 = 4,7839322 \\ \log \ \ 108 = 2,0334238 \\ \hline \qquad\qquad 2,7505084 = \log 563. \end{array}$$

Risulta che $60804 : 108 = 563$.

3.° Per avere la potenza d'un numero, bisogna moltiplicare il logaritmo del numero stesso pel grado della potenza che vogliamo ottenere; quindi cercare il numero corrispondente al prodotto che trovasi; esso sarà la potenza richiesta.

Proponiamoci di calcolare la quarta potenza di 17.

$$\log 17 = 1,2304484$$
$$\underline{\qquad\qquad 4}$$
$$4,9217936 = \log 83521.$$

Risulta che $17^4 = 83521$.

4.° Per aver la radice d'un numero, bisogna dividere il logaritmo del numero stesso per l'indice della radice che si vuol estrarre, e cercare il numero corrispondente; esso sarà la radice richiesta.

Cerchiamo la radice settima di 78125

$$\log 78125 = 4,8927900 \;\underline{|\,7}$$
$$0,6989700 = \log 5.$$

Risulta che $\sqrt[7]{78125} = 5$.

VIII. *Logaritmi dei numeri che eccedono il limite delle tavole. Numeri dei logaritmi che non si trovano esattamente fra quelli delle tavole.*

26. Nelle precedenti operazioni i numeri di cui ci occorrevano i logaritmi non eccedevano il limite delle tavole, ed i logaritmi di cui volevamo i numeri trovavansi esattamente fra quelli in esse tavole contenuti; ma può darsi che si voglia il logaritmo di un numero maggiore di quelli che sono

nelle tavole, come pure il numero d'un dato logaritmo di cui non si trovi l'identico sulle tavole stesse. Trattasi di vedere come si debba operare in questi casi.

Sia proposto di trovare il logaritmo di 4785625; poichè ne conosciamo la caratteristica, la quale in questo caso è 6 (16), non dovremo determinare che la mantissa del medesimo, la quale è la stessa anche pel numero 47856, 25 (20). Ora questo numero cade evidentemente fra i numeri $n = 47856$ ed $n + 1 = 47857$; il logaritmo cadrà in conseguenza fra

$$\log 47857 = {}^{*},6799455$$
$$\log 47856 = {}^{*},6799364$$

la differenza de' quali è $D = 0000091$.

Da ciò si vede che 91 diecimilionesimi è la quantità da aggiungere a log 47856 per avere log 47857; ma siccome (23) non prendendo dei logaritmi che le prime 7 cifre decimali si vedono questi logaritmi procedere (entro certi limiti) secondo una differenza costante, dunque se la differenza 1 fra i numeri p, e $p + 1$ ne porta D fra i logaritmi loro, la differenza 0,25 fra i numeri $p = 47856$, e 47856, 25 ne porterà x fra i loro logaritmi; essendo x dato dalla proporzione

$$1 : D = 0,25 : x, \text{ cioè } x = D \times 0,25$$

e poichè D è un numero di diecimilionesimi, tale sarà anche x, e nel caso attuale

$$x = 22,75$$

ossiano 23 diecimilionesimi, che aggiunti al logaritmo di 47856 ne daranno

$$\log 47856,25 = {}^{*},6799387$$

e quindi $\log 4785625 = 6,6799387$

che è il logaritmo richiesto.

27. È chiaro che deducendo dalla posta proporzione x, ovvero la frazione da aggiungersi a logaritmo p onde avere il logaritmo del numero dato, non commettiamo errore nelle 7 cifre decimali con cui esprimesi questo logaritmo; ma si avverta che tal regola non è da applicarsi che ai numeri maggiori di 10000, perchè da quanto abbiamo mostrato deducesi, che relativamente ai numeri che sono molto al di sotto di 10000 non si può dire che D entro certi limiti sia costante, oppure questi limiti sono sì ristretti, che non si può istituire la detta proporzione senza timore di errore. Di più si avverta che la regola suindicata è insufficiente, allorchè vuolsi impiegare per determinare i logaritmi dei numeri $>$ 5000 000; vero è che essa dà sempre esattamente le prime 7 cifre decimali; ma siccome (24) nei logaritmi dei numeri $>$ 5000 000, D non si manifesta che oltre le sette prime cifre, però allorquando il bisogno richiede di mettere in calcolo numeri sì grandi, conviene esprimere i logaritmi loro con assai più cifre decimali, e ricorrere a tal oggetto ad altre regole che qui non è d'uopo indicare.

Il quarto proporzionale x si potrebbe ottenere anche mediante le due proporzioni seguenti

$$1 : D :: 0,2 : D \times 0,2 = 18,2$$
$$1 : D :: 0,05 : D \times 0,05 = \underline{4,55}$$
$$x = 22,75, = 23.$$

Il qual calcolo si riduce a moltiplicare D per 2 e per 5, ed a fare la somma dei risultati, avvertendo che il primo prodotto esprime decimi, ed il secondo centesimi, di diecimillesimi, e che in conseguenza conviene porre i prodotti medesimi a scala nella maniera che qui sopra si vede.

28. Ma riflettasi che nelle tavole logaritmiche soglion essere indicate in margine le differenze dei logaritmi, ed i prodotti di esse differenze per ciascuno dei numeri 1, 2, 3,..... 9, mancanti per altro della loro ultima cifra; la quale è per noi inutile, poichè non influisce su la parte decimale che conserviamo: i prodotti che corrispondono alla differenza D = 91

sono	9,	18,	27,	36,	46,	55,	64,	73,	82.
per	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.

e questi appunto sono quelli, che così disposti troviamo in margine della tavola suddivisata (28). Ora è chiaro che per determinare x si può profittare di questi prodotti facendo a meno dei calcoli che abbiamo indicati qui sopra: nel nostro caso presi quelli che corrispondono respettivamente a 2 e 5, presi cioè i prodotti 18 e 46

$$\begin{array}{r} 18 \\ \underline{46} \\ 22,6 \end{array}$$

ed avendoli posti uno sotto l'altro scalati, affinchè le cifre della stessa denominazione siano in colonna, e sommatili, si trova $x = 22,6$ ovvero 23 diecimilionesimi, come sopra.

29. Ora passiamo a vedere come possa determinarsi il numero corrispondente ad un logaritmo di cui non si trova l'identico sulle tavole.

Sia per esempio 2,6799387 questo logaritmo; la parte decimale del medesimo cade fra quella di

$$\log 47857 = *,6799455$$

e quella di $\log 47856 = *,6799364$

la cui differenza è $D = 0,0000091$.

fra il logaritmo dato $= *,6799387$

e $\log 47856 = *,6799364$

la differenza è $d = 0,0000023$.

Or dalla proporzione

$$D : 1 = d : x$$

si ricava

$$x = \frac{d}{D} = \frac{25}{91} = 0,25.$$

Così aggiungendo la frazione 0, 25 a 47856, otterremo il numero 47856, 25 il di cui logaritmo avrà una mantissa uguale a 6799387, che è quella del logaritmo dato; dunque

$$2,6799387 = \log 478,5625.$$

L'operazione si riduce a dividere per la differenza dei due logaritmi consecutivi, fra i quali è compreso il logaritmo dato, l'eccesso di questo logaritmo sull'inferiore di essi. Le cifre del quoziente si pongono alla destra del numero che corrisponde al medesimo logaritmo inferiore: indi vi si colloca la virgola in modo che la parte intera del numero risultante abbia tante cifre, quante sono le unità contenute nella caratteristica del logaritmo dato più una; questo corrisponderà al logaritmo del numero stesso. Il quoziente x non dovrà spingersi oltre le prime due cifre, perchè D, e d non contengono che due, o tre cifre decimali, mentre ne dovrebbero contenere un numero indefinito, e sappiamo che quando nel dividendo e nel divisore si sopprimono le ultime cifre, non possiamo contare che sulle prime due cifre del quoziente, le altre risultando inesatte. D'altra parte (27) il numero corrispondente, datoci dalla proporzione fra le differenze dei logaritmi e dei numeri non può ol-

trepassare 5 000 000, ovvero non può contenere più di 7 cifre, comprese le decimali.

E qui giova ripetere l'avvertenza data al n.° 30, cioè che la medesima proporzione non si può rigorosamente istituire che pei numeri maggiori di 10000.

30. Ma per passare dal logaritmo al numero si può profittare eziandio delle *tavolette delle parti proporzionali*, facendo un operazione inversa a quella, che fu indicata al n.° 31. Cercheremo in primo luogo la differenza D dei logaritmi consecutivi fra quali cade il logaritmo dato; quindi la differenza d fra il logaritmo dato, ed il minore dei due suddetti: ciò fatto, cercheremo nella tavoletta dei prodotti di D, quello di p immediatamente minore di d; la cifra corrispondente a p sarà la prima del quoziente; sottrarremo p da d, alla destra del resto porremo uno zero ed avremo d'; cercheremo il prodotto p' immediatamente minore di d': la cifra corrispondente a p' sarà la seconda del quoziente. Se con questo metodo volessimo avere una terza cifra del quoziente, non avremmo un risultato esatto. Ecco il calcolo.

Il log. dato è $*,6799387$

il log. minore è $*,6799364 = \log 47856$

$23 = d$

$18 = p$ corrispondente a 2

$50 = d'$

$46 = p'$ corrispondente a 5

si trova $2,6799837 = \log 478,5625$.

IX. *Dei logaritmi delle frazioni.*

31. Cerchiamo il logaritmo x della frazione $\frac{k}{h}$. Se fos-

se $k > h$, x sarebbe l'eccesso del logaritmo di k sopra quello di h, ed il quesito non presenterebbe difficoltà; ma se fosse $k < h$, sarebbe $\log k < \log h$, ed in tal caso non si vede qual valore potrebbe assegnarsi al logaritmo richiesto.

Si osservi, che in ambedue i casi di $m > n$ e di $m < n$, x dipende dall'equazione

$$10^x = \frac{m}{n}$$

ovvero

$$\frac{1}{10^x} = \frac{n}{m};$$

perlochè presi i logaritmi da ambe le parti, troviamo

$$\log 1 - \log 10^x = \log \frac{n}{m};$$

ovvero ancora

$$\log 1 - x = \log \frac{n}{m},$$

donde si ricava

$$x = \log 1 - \log \frac{n}{m};$$

quindi, poichè per ipotesi $\log 1 = 0$, sarà il logaritmo della frazione $\frac{m}{n}$ uguale al logaritmo della frazione $\frac{n}{m}$ preso negativamente.

Dunque i logaritmi delle frazioni propriamente dette sono negativi.

32. Ciò è d'altronde consentaneo alle regole dietro le quali si fa il calcolo delle frazioni: infatti ponendo

$$K = P \times \frac{m}{n} = P : \frac{n}{m},$$

otterremo

$$\log K = \log P + \log \frac{m}{n} = \log P - \log \frac{n}{m}$$

dove si vede che a $\log \frac{m}{n}$ si può sostituire $\log \frac{n}{m}$, purchè però se l'uno dee entrare in calcolo per addizione, l'altro v'entri per sottrazione, e viceversa; lochè esprimesi più brevemente dicendo che ad uno di essi logaritmi si può sostituire l'altro preso negativamente.

Cerchiamo il logaritmo della frazione $\frac{357}{873}$.

$$\log 873 = 2,9410142$$
$$\log 357 = 2,5526682$$
$$\log \frac{873}{357} = 0,3883460$$

dunque $\log \frac{357}{873} = -0,3883460$.

33. Per ottenere il logaritmo d'un numero composto d'un intero e d'una frazione, primieramente si sommano le due parti, facendone un solo numero frazionario; quindi se ne determina il logaritmo, sottraendo dal logaritmo del numeratore quello del denominatore. Per esempio cerchiamo il logaritmo di $34, \frac{7}{15}$. Si vede che

$$34, \frac{7}{15} = \frac{517}{15}$$
$$\log 517 = 2,7134905$$
$$\log 15 = 1,1760913$$
$$\log 34, \frac{7}{15} = 1,5373992$$

34. Se la frazione di cui si vuole il logaritmo fosse decimale, si sopprimerebbe la virgola, si cercherebbe il logaritmo del risultato, e si sottrarrebbe questo da un numero di tante unità, quante cifre decimali sono nel numero dato.

Si voglia il logaritmo di 0,03567.

$$\log 3567 = 3,5523031$$

$$5 - 3,5523031 = 1,4476969$$

dunque $\log 0,03567 = -1,4476969$.

Quando la frazione decimale è periodica, primieramente si riduce in frazione ordinaria, e quindi si procede come sopra.

35. Quindi è che se un logaritmo di cui si vuole il numero corrispondente sarà negativo, questo numero non potrà essere che una frazione.

Sia $-l$ il logaritmo di cui dobbiamo cercare la frazione corrispondente p; posto

$$10^{-l} = p$$

e moltiplicati i due membri per 10^n, nel supposto che sia $n > l$, avremo

$$10^{n-l} = 10^n p$$

dove $n - l$ sarà un logaritmo positivo, di cui è facile trovare il numero corrispondente, ed è manifesto che questo numero diviso per 10^n darà p: dunque per trovare la frazione che corrisponde ad un dato logaritmo negativo, bisogna aggiungere al medesimo logaritmo tante unità, che bastino a renderlo positivo; cercare il numero corrispondente al risultato; indi dividere esso numero per una potenza di 10 indicata dal numero delle unità aggiunte; lo che si fa, come sappiamo, avanzando la virgola di tante cifre, quante sono queste unità.

Debbasi trovare il numero che corrisponde al logaritmo negativo

$$-2,8010956;$$

aggiungendovi 4 unità, avremo 1, 1989044, a cui corrisponde il numero 15, 809; dividendo questo numero per 10^4, il quoziente sarà 0, 0015809; dunque

$$-2,8010956 = \log 0,0015809$$

36. Si può giungere al medesimo intento anche colla regola seguente.

Indicando con n il numero corrispondente al logaritmo dato preso positivamente, sarà

$$a^l = n, \text{ ed } a^{-l} = \frac{1}{n} = p;$$

dunque il numero cui corrisponde $-l$ è *l'unità divisa pel numero che corrisponde al logaritmo dato preso positivamente*.

Ma questa regola, come quella che conduce ad un risultato non troppo prossimo al vero, non è da adoprarsi che nei casi in cui non si esige grand' esattezza.

X. *Dell'uso dei complementi aritmetici.*

37. Il complemento aritmetico d'un numero è l'eccesso dell'unità d'un ordine immediatamente superiore all'ordine massimo di questo numero, sopra il numero stesso. Così

$$1000 - 517 = 483$$

sarà il complemento di 517.

Il complemento però d'una frazione decimale priva di unità intere è costantemente l'eccesso d'una unità di second'ordine, cioè 10, su la frazione medesima. Così

$$10 - 0,235 = 9,765$$

sarà il complemento di 0,235.

I complementi aritmetici si possono impiegare nelle numeriche operazioni per cambiare le sottrazioni in addizioni; poichè essendo

$$-517 = 483 - 1000,$$

$$-0,235 = 9,765 - 10,$$

è manifesto che invece di sottrarre un numero, si può aggiungere il suo complemento, e quindi togliere un' unità dell' ordine immediatamente superiore all' ordine massimo del numero stesso. Per esempio sia $984 - 517 = x$.

$$\begin{array}{r} 984 \\ +\text{comp. di } 517 = 483 \\ \hline 1467 \\ -1000 \\ \hline x = 467 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 984 \\ 517 = \overline{1}483 \\ \hline x = 467 \end{array}$$

Nell' operazione si può denotare per $\overline{1}$ l' unità che debbe esser sottratta, avvertendo di situarla nella colonna delle cifre del suo ordine.

38. Frattanto sembrerà che l' uso dei complementi non possa servire alla brevità delle aritmetiche operazioni, trattandosi di sostituire al calcolo di una sottrazione, altro calcolo che comporta una sottrazione ed un' addizione; ma si rifletta che per trovare il complemento d' un numero, basta sottrarre la prima cifra significativa a destra da 10 e tutte le altre da 9, sottrazione sì semplice, che si può fare anche mentalmente allorquando si ha sott' occhio il numero, o mentre vengono dettate le sue cifre una ad una. D' altra parte vuolsi che i complementi aritmetici non sie-

no introdotti che nei calcoli nei quali han luogo più addizioni, o sottrazioni successive.

39. L'impiego dei complementi aritmetici offre il mezzo di esprimere i logaritmi delle frazioni più semplicemente di quel che comporterebbe la convenzione indicata (31).

Sia proposto di trovare il logaritmo di $\frac{31}{47}$.

$$\log \frac{31}{47} = \log 31 - \log 47;$$

potevamo dire invece

$$\log \frac{31}{47} = \log 31 + \text{compl. } \log 47 - 10$$

$$\begin{aligned} \log 31 &= 1,4913617 \\ \text{comp. } \log 47 &= \underline{8,3279021} \\ & \quad 9,8192638 \end{aligned}$$

quindi avremo

$$\log \frac{31}{47} = \overline{19},8192638,$$

ovvero, non effettuando la sottrazione delle 10 unità che sulla caratteristica 9,

$$\log \frac{31}{47} = \overline{1},8192638.$$

Così aggiungendo al logaritmo del numeratore il complemento del logaritmo del denominatore, quindi togliendo 10 dalla caratteristica del risultato, abbiamo il logaritmo della frazione il quale avrà la sola caratteristica negativa.

40. Ciò vale anche per le frazioni decimali. Per esempio

$$\log 0,0029 = \log 29 - 4$$

$$\log 29 = 1,4623980.$$

dunque

$$\log 0,0029 = \overline{3},4623980.$$

41. Or se fosse proposto di trovare il numero corrispondente ad uno di questi logaritmi, per esempio a $\overline{2},9650135$, dovremmo sopprimere la caratteristica, cercare il numero corrispondente a $0,9650135$, il quale è $9,226$; quindi dividere questo numero per una potestà di 10 indicata dalla caratteristica soppressa: dunque

$$\overline{2},9650135 = \log 0,09226$$

42. L'uso di questi logaritmi contribuisce a semplicizzare il calcolo logaritmico più di quello che non fanno i logaritmi interamente negativi. Infatti si osservi, che per

moltiplicare il logaritmo	$\overline{2},6782321$
ex. gr. per	6
si fa il prodotto della mantissa	$4,0693926$
poi quello della caratteristica	$\overline{12}$
lo che dà	$\overline{8},0693926$.

E dovendo dividere il logaritmo $\overline{5},6835172$ ex. gr. per 9, si comincia con aggiungere alla caratteristica tante unità negative che bastino a renderla divisibile per esso numero 9, ed altrettante unità positive, affinchè il valore del dato logaritmo non venga alterato; poi si fa la divisione nel seguente modo:

$$\overline{5},6835172 = -9 + 4,6835172;$$

$$\text{ed } \frac{1}{9} \times \overline{5},6835172 = \overline{1},5203908.$$

XI. *Dell' uso delle tavole trigonometriche sessagesimali.*

43. Dopo avere esposta la teoria e l'uso delle tavole dei logaritmi dei numeri naturali, non sarà inopportuno tener

proposito dei logaritmi delle rette trigonometriche delle quali la trigonometria insegna come possa determinarsi il valore in parti del raggio.

Noi però non prenderemo ad esporre i metodi speciali coi quali sono stati trovati tali logaritmi, non essendo questo il luogo opportuno per discorrere simil materia; supporremo adunque le tavole trigonometrico-logaritmiche già costrutte, e ci limiteremo ad indicarne l'uso: perlochè ricorreremo, come abbiamo fatto pei logaritmi dei numeri naturali, alle tavole di Gardiner menzionate alla pag. 276, le quali per quanto viene attestato dai pratici sono pure correttissime rispetto alle rette trigonometriche.

44. In queste tavole si trovano i logaritmi dei seni e delle tangenti di secondo in secondo pei quattro primi gradi, e di dieci in dieci secondi pel resto del quadrante. Or non considerando che i gradi, i quali sono indicati all'estremità superiore d'ogni pagina, si potrebbe credere che la tavola non potesse immediatamente somministrare i logaritmi delle rette trigonometriche al di là del quarantacinquesimo grado; ma se si osserva che le colonne sopra le quali sono poste le denominazioni *sen*, *cos*, ec., hanno al disotto i titoli di *cos*, *sen*, ec., vedremo chiaramente che tenendo dietro a questi titoli, come ancora alle colonne ascendenti poste a destra per indicare i minuti ed i secondi, si possono avere dalla tavola stessa i logaritmi ancora dei seni, coseni, ec., dal quarantacinquesimo sino al novantesimo grado. Perciò la tavola somministra i logaritmi dei seni, coseni, ec., di dieci in dieci secondi non solo pei quattro primi gradi, cioè da o a 4°, come abbiamo detto, ma eziandio pei quattro ultimi gradi del quadrante, cioè da 86° sino a 90°.

45. Se l'arco o l'angolo dato contenesse dei secondi, e non si trovasse ne' limiti de' quattro primi gradi o de' quattro ultimi, allora converrebbe ricorrere alle *tavolette delle differenze*, e fare il calcolo in un modo analogo a quello che abbiamo indicato (28) tenendo proposito dei logaritmi dei numeri. Ciò suppone che le differenze dei logaritmi dei seni, coseni, ec., si considerino come proporzionali alle differenze degli archi, e sebbene questa proporzione sia inesatta, pure quando si istituisce ne' dovuti limiti, dà una sufficiente approssimazione.

46. Giova osservare che le differenze tra i logaritmi delle tangenti sono comuni ai logaritmi delle cotangenti; infatti essendo a ed a' due archi, dalle equazioni

$$\text{tang}\, a = \frac{R^2}{\cot a}, \quad \text{tang}\, a' = \frac{R^2}{\cot a'},$$

ricavasi che

$$\log \text{tang}\, a - \log \text{tang}\, a' = \log \cot a' - \log \cot a.$$

I logaritmi delle tangenti e delle cotangenti maggiori del raggio sono maggiori di 10: nelle tavole però la diecina è stata soppressa, e non si trovano indicati che i resti; per cui sarà d'uopo aggiungere ai resti medesimi 10, ogniqualvolta occorrerà di metterli in calcolo.

47. Poste queste avvertenze prenderemo a fare i seguenti calcoli, i quali terranno luogo d'ogni ulteriore spiegazione intorno all'uso delle tavole trigonometriche.

1.° Proponiamoci di cercare il logaritmo del seno d'un arco contenente gradi, minuti, secondi e frazioni di secondo.

Sia questo arco per esempio $6^\circ\, 32'\, 37'', 8$.

log sen	6° 32′ 30″ (diff. 1836) . .	9,0566218
per	7″.	12852
per	0, 8.	14688
log sen	6° 32′ 37″, 8	9,0567650

2.° Cerchiamo il log. del coseno dell' arco 83°27′22″,2.

log cos	83° 27′ 30″ (diff. 1836) . .	9,0566218
per	—7″	12852
per	—0, 8	14688
log cos	83° 27′ 30″ 2	9,0567650

3.° Cerchiamo il log. della tangente dell'arco 8°13′52″,76.

log tang	8°13′50″ (diff. 1486) . .	9,1603083
per	2″	2972
per	0,7	10402
per	0,06.	8916
log tang	8° 13′ 52,″76.	9,1603493

4.° Cerchiamo il log. della cotangente dell'arco 81°46′7″,24.

log cot	81°46′10″ (diff. 1486). .	9,1603083
per	—2″	2972
per	—0,7	10402
per	—0,06	8916
log cot	81°46′7″,24	9,1603493

48. Ora passiamo alla risoluzione del quesito inverso, cioè supponiamo che sia dato il logaritmo d'un seno, o di un coseno, ec., e proponiamoci di trovare l'arco corrispondente.

1.° Per esempio, sia dato log sen $x = 9,0567650$. Nelle tavole fra i log-sen minori di questo il più prossimo è 9,0566218, il quale corrisponde a 6°32′30″. La differenza col logaritmo dato è 1432, e la differenza tabulare corrispondente a 10″, è 1836. In conseguenza divideremo 1432

per 1836 ed i decimi del quoziente indicheranno secondi. Così trovasi 7",8. Adunque l'arco richiesto sarà $x = 6^{\circ}32'37'',8$. Ecco l'esempio di questo calcolo, e di altri analoghi.

log sen x = 9,0567650			
per	9,0566218 (diff. 1836) . . .		6°32'30"
1.° resto	14320		7
2.° resto	14680		0,8
		$x =$	6°32'37",8

2.° Cerchiamo l'arco x il cui coseno ha per logaritmo 9,0567650.

log cos x = 9,0567650			
per	9,0568054 (diff. 1836) . . .		83° 27' 20"
1.° resto	4040.		2
2.° resto	3680.		0,2
		$x =$	83°27'22",2

3.° Cerchiamo l'arco x la cui tangente ha per logaritmo 9,1603493.

log tang x = 9,1603493			
per	9,1603083 (diff. 1486) . . .		8° 13'50"
1.° resto	4100.		2
2.° resto	11280		0,7
3.° resto	8780.		0,06
		$x =$	8° 13'52",76

4.° Cerchiamo l'arco x la cui cotangente ha per logaritmo 9,1603493.

log cot x = 9,1603493			
per	9,1604569 (diff. 1486) . . .		81° 46'0"
1.° resto	10760		7
2.° resto	3580.		0,2
3.° resto	6080.		0,04
		$x =$	81° 46'7",24

49. Le formule trigonometriche vengono ordinariamente determinate nella ipotesi di $R = 1$. Ora volendo istituire a seconda di esse i calcoli, ed eseguirli mediante le tavole, è d'uopo ristabilire nelle formule stesse l'omogeneità, prendendo $\log R = 10$, come viene indicato dalla trigonometria.

Ma v'ha un'altra regola: questa suppone che le formule si lascino nel loro stato, cioè che si conservi l'ipotesi di $R = 1$, e che si tolgano 10 unità da ogni logaritmo che ci vien dato dalla tavola. È utile fare questa sottrazione sopra la sola caratteristica, la quale talvolta diverrà negativa, e più ancora sarà vantaggioso d'impiegare i logaritmi come ci vengono dati dalla tavola correggendo convenientemente il resultato. Questa correzione sarà sempre facile a farsi; perocchè i calcoli che si fanno coi logaritmi sono o addizioni o sottrazioni, ed è chiaro che ogni logaritmo additivo ricavato dalla tavola porrà una diecina di più nel risultato, ed ogni logaritmo sottrattivo vi porrà una diecina di meno.

50. Per abbreviare i calcoli poi dovremo sempre sostituire alla sottrazione d'un logaritmo l'addizione del suo complemento aritmetico. Allora la diecina che si dovrebbe sottrarre da questo logaritmo corrispondentemente all'ipotesi di $R = 1$, sarà compensata da quella che vi si trova aggiunta prendendone il complemento. Del resto l'errore di una diecina in un logaritmo sarebbe sì sensibile che non potrebbe rimanere inosservato.

51. Frattanto prendiamo a fare i due seguenti calcoli per viemmeglio schiarire le regole esposte.

1.° Sia $$x = 419 \times \text{sen}^2\, 40^\circ;$$

sarà $$\log x = \log 419 + 2 \log \text{sen}\, 40^\circ.$$

Or ricavando dalle tavole $\log \text{sen}\, 40^\circ$, il $\log x$ conterrà due

diecine di più; conseguentemente fatta l'operazione, converrà toglierle dal risultato.

$$\begin{aligned} \log 419 &= 2,6222140 \\ 2\log 40^\circ &= 19,6161350 \\ \hline \log x &= 2,2383490 = \log 173,12 \end{aligned}$$

2.° Sia $\quad \operatorname{sen} x = \dfrac{314 \times \operatorname{sen} 30^\circ}{411 \times \cos^2 15^\circ}$.

sarà

$\log \operatorname{sen} x = \log 314 - \log 411 + \log \operatorname{sen} 30^\circ - 2\log \cos 15^\circ$.

Facendo uso dei complementi, le due diecine che converrà togliere a $2\log \cos 15^\circ$ saranno compensate dalle 2 diecine sopra le quali si prende il complemento di questa quantità sottrattiva. Il $\log \operatorname{sen} 30^\circ$ ed il complemento di $\log 411$ introducono due diecine di più, ma cercando l'angolo x per mezzo delle tavole, non dovremo togliere dal risultato che una sola diecina, come si vede qui appresso.

$$\begin{aligned} \log 314 &= 2,4969296 \\ \text{comp.} \log 411 &= 7,3861582 \\ \log \operatorname{sen} 30^\circ &= 9,6989700 \\ 2\ \text{comp.} \log \cos 15^\circ &= 0,0301124 \\ \hline \log \operatorname{sen} x &= 9,6121702 = \log \operatorname{sen} 24^\circ\, 10'\, 7''. \end{aligned}$$

XII. *Notizie storiche intorno alle più celebri tavole logaritmiche.*

52. L'aritmetica fu arricchita dell'ammirabile trovato dei logaritmi, allorchè Giovanni Nepero scozzese rese di pubblica ragione le tavole da lui calcolate, intitolandole *Logarithmorum canonis descriptio, seu arithmeticarum supputationum mirabilis abbreviatio*. Queste tavole, a cui tro-

vasi unita una spiegazione sul modo di farne uso nella risoluzione dei triangoli, stampate per la prima volta in Edimburgo nell'anno 1614, determinano l'epoca di una tal invenzione. Nondimeno Beniamino Bramer asserisce che Byrge, senza conoscer le tavole di Nepero, aveva costruite altre tavole progressive aritmetiche e geometriche, il cui manoscritto fu trovato e riconosciuto da Kaestner Professore di Matematica nell'Università di Gottinga; ma sebbene esse non abbiano alcuna cosa a comune colle tavole di Nepero, pure stante la posterior pubblicazione delle medesime seguita nel 1620, non si può concedere che Byrge abbia inventati i logaritmi prima di Nepero.

53. Gli studiosi saranno vaghi di conoscere il modo con cui Nepero concepì i logaritmi, ed il metodo ch'ei tenne per costruirne le tavole. A tal oggetto essi potranno consultare l'opuscolo di Nepero stesso, intitolato *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, ec. pubblicato nell'anno 1618 dopo la di lui morte, da Roberto Nepero suo figlio. Frattanto ne basti avvertire che Nepero nel proposito di rendere la sua scoperta specialmente utile alla pratica della Trigonometria, non calcolò che i logaritmi dei seni di minuto in minuto per tutto il quadrante, ponendo il logaritmo del raggio uguale a zero, e adottando quel sistema in cui il logaritmo dell'unità è zero, il logaritmo della base è uguale all'unità, e la base stessa è espressa per una quantità incommensurabile. Questi logaritmi sono stati chiamati *iperbolici* o *naturali*, ma aderendo al consiglio del signor Lacroix, meglio è distinguerli col nome di *neperiani*, in memoria del loro illustre autore, che a questa scoperta deve il suo primo titolo di gloria.

54. Dopo Nepero molti benemeriti geometri presero a

perfezionare la di lui invenzione; alcuni ne resero più chiara la dottrina, altri rifecero i calcoli, e cambiarono il sistema dei logaritmi, scegliendo una base più conveniente alla numerazione decimale; nè mancarono infaticabili calcolatori che amplificassero le tavole e le portassero a maggiore esattezza: lo che non è da meravigliare, poichè le invenzioni che si possono ridurre a pratica utilità pervengono rapidamente allo stato della maggior perfezione. Keplero, Briggs, Gunther, Gellibrand, inglesi; Adriano Wlacq olandese; Beniamino Ursino tedesco, il quale fece conoscere il primo la scoperta dei logaritmi nella Germania; Dionisio Henrion, ed Eduardo Wingate che concorsero entrambi a renderla nota per la prima volta alla Francia, ed il P. Bonaventura Cavalieri discepolo del divino Galileo, che lo stesso vantaggio arrecò all'Italia, sono tutti insigni geometri quasi contemporanei di Nepero che hanno diritto di essere rammentati come coloro che più contribuirono a perfezionare, e diffondere il canone dei logaritmi.

55. Giovanni Keplero celebre Astronomo, inventore delle tre analogie dei pianeti che anche oggi conservano il suo nome, nel 1624 diede in luce un libro intitolato *Chilias logarithmorum ad totidem numeros rotundos præmissa demonstratione legitima ortus*, e nel 1625, *Supplementum chiliades logarithmorum*, ove trovasi la dottrina dei logaritmi basata sulle proprietà delle proporzioni geometriche, e resa indipendente dalla considerazione del moto di cui avea profittato Nepero; ma nelle tavole conservò il medesimo sistema di logaritmi: in esse vedesi il valore degli archi subordinato a quello dei seni, inguisachè, mentre i seni crescono uniformemente, gli archi procedono per conseguenza senza legge.

56. Anche Beniamino Ursino matematico dell' Elettore di Brandeburgo, nella sua Trigonometria pubblicata nel 1625 conservò il sistema dei logaritmi neperiani: essa ha per titolo *Trigonometria cum magno logarithmorum canone;* vi si trovano i seni naturali di 10 in 10 secondi per tutto il quadrante, e i loro logaritmi disposti nel modo praticato da Nepero. Ursino però calcolò i seni ed i loro logaritmi con una cifra di più, ponendo il raggio uguale a centomillioni. La Trigonometria rettilinea e sferica che in questa opera si trova diffusamente trattata è preceduta da molte nozioni di Geometria, e ricolma di calcoli numerici destinati a far ampia spiegazione dell' uso delle tavole.

Ursino avea nel 1618 già pubblicata altr' opera sotto il titolo di *Trigonometria logarithmica usibus discentium accmodata,* la quale non è che il *Mirifici logarithmorum canonis*, in alcuni luoghi modificato ed arricchito di note.

57. Eurico Briggs professore di Geometria a Londra, abbandonò il primo il sistema de' logaritmi neperiani; vuolsi che egli ne conferisse con Nepero, e che ad istigazione di lui si accingesse a comporre nuove tavole in modo che la progressione geometrica fondamentale fosse 1, 10, 100, 1000, ec., o che la *base*, vogliam dire quella quantità che colle sue successive potestà genera i termini della progressione medesima, fosse 10. Nepero nella sua opera *Mirifici logarithmorum canonis* propone questa vantaggiosa modificazione al suo trovato, che d' altra parte è consentanea al sistema di numerazione in uso.

Briggs rese di pubblica ragione la sua opera a Londra nel 1624 intitolandola *Arithmetica logarithmica,* la quale si compone d' una tavola di logaritmi dei numeri dall' 1 al 20000 e dal 90000 al 100000, calcolati con 14 cifre decimali; e

d'un discorso sulla natura, proprietà ed uso dei logaritmi. Ma Briggs nel 1618 avea già dato alla luce un saggio del suo lavoro intitolandolo *Logarithmorum chilias prima*, che contiene i logaritmi de' numeri dall' 1 al 1000. Il proposito di Briggs era di calcolare eziandio i logaritmi dei seni e delle tangenti per tutti i centesimi dei 90 gradi del quadrante, e di riempiere la lacuna della suddetta tavola dal numero 20000 al 90000; ma non lo potè interamente effettuare, chè nel 1630 fu prevenuto dalla morte. Al primo lavoro supplì Enrico Gellibrand, ed all'altro Adriano Wlacq, come passiamo a dire.

58. Enrico Gellibrand professore d'Astronomia a Londra condusse a termine la summentovata tavola dei logaritmi dei seni e tangenti per ogni centesimo di grado, che fu pubblicata nel 1633 congiuntamente ad un trattato di Trigonometria sotto il titolo di *Trigonometria britannica*. *Goudæ* 1633. Quivi trovansi espressi con 14 decimali i seni naturali ed i loro logaritmi per tutti i centesimi dei 90 gradi del quadrante, come pure le tangenti e le secanti naturali ed i logaritmi delle tangenti di questi archi, ma con dieci decimali soltanto. Nella prefazione Gellibrand asserisce che Briggs verso il 1600 avea già calcolati i seni naturali dei centesimi di grado come pure le tangenti, e le secanti con 15 cifre per mezzo di metodi algebrici.

59. E qui occorre che si rammenti Gunther cooperatore di Briggs il quale col suo *Canon of triangles*, stampato in Londra nel 1620 arricchì l'Astronomia delle prime tavole logaritmico-trigonometriche calcolate sopra la base 10. Queste tavole contengono i logaritmi dei seni e delle tangenti per tutto il quadrante di minuto in minuto, espressi con sette decimali.

60. Adriano Wlacq matematico e tipografo olandese fu calcolatore infaticabile; a questo l'invenzione de' logaritmi va debitrice del suo maggiore incremento. Nel 1628 egli dette alla luce una ristampa dell'Aritmetica logaritmica di Briggs, *Arithmetica logarithmica, editio secunda per Adrianum Wlacq. Goudæ* 1628, dove supplì colla propria opera alla mancanza dei logaritmi dei numeri dal 20000 al 90000, e vi aggiunse i logaritmi dei seni, delle tangenti, e secanti di minuto in minuto.

Dipoi Wlacq prese a far lavoro maggiore. Valendosi delle grandi tavole di Retico pubblicate da Pitisco, *Thesaurus mathematicus ecc.*, 1613, ove già erano stati espressi con 15 cifre i seni naturali degli archi di 10 in 10 secondi, ne calcolò i logaritmi con 10 cifre, e lo stesso fece relativamente alle tangenti; poichè come dice Lalande (*) doveva egli aver veduto che l'uso dei minuti e dei secondi era più famigliare agli astronomi dei centesimi di grado, e che le differenze dei logaritmi erano troppo grandi al principio di questa tavola. Così nel detto anno 1633 pubblicò la sua grande opera, la quale ha per titolo *Trigonometria artificialis sive magnus canon triangulorum logarithmicus ad radium* 10 000 000 000, *et ad dena secunda, ab Adriano Ulacco goudano constructus. Goudæ* 1633. Questa opera di cui anche oggidì si fa uso comprende, 1.° la trigonometria rettilinea e sferica, 2.° i logaritmi dei seni e delle tangenti con dieci decimali di 10 in 10 secondi, 3.° i logaritmi dei numeri naturali da 1 al 20000, con 14 decimali estratti dall'Aritmetica logaritmica di Briggs.

Wlacq non tralasciò di fare delle tavole portatili di cui se-

(*) *Astron.* T. III. p. 626.

no state fatte moltissime edizioni; la prima di esse porta la data dell' opera summentovata 1633, ed ha per titolo *Tabulæ sinuum, tangentium et secantium, et logarithmi sinuum, tangentium et numerorum ab unitate ad* 10000 *cum methodo facillima, illarum ope resolvendi omnia triangula rectilinea et sphærica, et plurimas quæstiones astronomicas.*

61. Il P. Bonaventura Cavalieri nel suo *Directorium generale uranometricum* pubblicato in Bologna nel 1632, che nella sostanza è la Trigonometria più completa, e più ricca d' applicazioni che si potesse bramare in quel tempo, inserì una tavola di logaritmi de' seni, tangenti, secanti, ec., che vuolsi essere stata la prima italiana. Questa tavola fu in allora utilissima, perchè gli archi vi procedono di secondo in secondo fino al quinto minuto, di cinque in cinque secondi fino al decimo minuto, di 10 in 10 sino al ventesimo, di 20 in 20 sino al trentesimo, di 30 in 30 sino a 1 grado e 30 minuti, e per il resto del quadrante crescono di minuto in minuto. Inoltre vi sono i logaritmi dei numeri da 1 al 10000.

62. Quanto ai francesi, diremo coll' illustre Montucla, che in quell'epoca l'opera loro sopra tal materia, si ristrinse a raccorre i frutti nati e maturati in altri climi. Henrion il primo dette alla luce in Francia una tavola di logaritmi nel 1626, *Canon manuel des sinus, tangentes, et coupantes. Paris* 1626; che contiene i logaritmi dei numeri da 1 a 20000 con 10 decimali, e quelli dei seni e tangenti di minuto in minuto per tutto il quadrante con 7 decimali soltanto. Wingate però avea già trattato dell' uso dei logaritimi in un' opera pubblicata a Parigi nel 1623, la quale ha per titolo *Usage de la règle de proportion en arithmétique et en géométrie, ainsi que de l'usage des logarithmes.*

63. Al principiare del secolo passato essendo cresciuto per l'avanzamento delle scienze l'uso dei logaritmi, e divenute rare le tavole di Wlacq di cui tutti gli astronomi facevano uso, molti geometri furono solleciti a pubblicarne altre più estese, e più esatte. A tal oggetto s'inventarono formule, e serie logaritmiche per cui più facile divenne la costruzione delle tavole e più rapidi i calcoli pei quali Briggs aveva fatta sì gran fatica: ma su ciò taceremo per non superare i confini che ci siamo prescritti nel dare sommariamente la storia delle tavole logaritmiche. Ci contenteremo d'indicare colla massima brevità la serie degli autori di tavole logaritmiche più accreditati. Scherwin, Gardiner, Taylor e Hutton inglesi, Schulze dell'Accademia di Berlino, Giorgio Vega tedesco, Borda e Callet francesi, occupano tra questi il primo luogo.

64. Scherwin nel 1724 pubblicò delle tavole a Londra, *Scherwin's Matematical tables*, ec. *London* 1724 in 8.°, ove inserì i logaritmi dei numeri da 1 sino a 101000 con 7 decimali, i seni, le tangenti, le secanti, e seno-versi di minuto in minuto sì naturali che logaritmici per tutto il quadrante; premettendo un discorso sopra la costruzione delle tavole logaritmiche, nel quale si trovano raccolti i metodi di Wallis, di Halley, e di Scharp.

65. Tostochè furono esaurite le prime due edizioni di queste tavole, Gardiner ne pubblicò una terza la quale comparve nel 1741; e per supplire alle tavole di Wlacq, divenute rare, ei dette in luce nel 1742 le sue grandi tavole, *Tables of logaritmes* ec. *London* 1742 in 4.°, contenenti i logaritmi dei numeri da 1 sino a 102000, e quelli dei seni delle tangenti di secondo in secondo pei primi 72 minuti, e di 10 in 10 secondi pel resto del quadrante. Questa pri-

ma edizione delle tavole di Gardiner è stata sempre rara stantechè pochi esemplari se ne fecero.

Il P. Pesenas attese perciò ad istigazione di Lalande ad una nuova pubblicazione di queste tavole, la quale fu fatta in Avignone nell'anno 1770, aggiungendovi i logaritmi dei seni di secondo in secondo pei 4 primi gradi calcolati da Mouton, che ne avea già rimesso il manoscritto all'Accademia delle Scienze. Callet poi ne fece altra edizione portatile in 8.° nel 1783 coi tipi di Didot, la quale non ostantechè fosse accuratamente rivista da Jombert e da Callet medesimo pur non potè riuscire assai corretta.

66. Nell'anno 1778 Schulze pubblicò una nuova raccolta di tavole logaritmiche, trigonometriche, ec., ove si trovano i logaritmi dei numeri da 1 a 101000; i seni, le tangenti ed i loro logaritmi colle loro differenze, per ogni minuto del quadrante, e di 10 in 10 secondi pei tre primi gradi; i logaritmi iperbolici dei numeri da 1 a 1000 calcolati da Wolfram con 47 decimali; ed altre tavole necessarie alla matematica pratica.

67. Tra le tavole moderne però quelle di Vega meritano una particolare distinzione; esse sono da tenersi in gran conto non solo rispetto alla loro estensione, ma rispetto ancora alla loro massima correttezza. Vega nel 1783 pubblicò a Vienna le *Tavole e formule trigonometriche, ec.*, ove si trovano i logaritmi ordinarj de' numeri da 1 a 101000, con 7 decimali; i logaritmi neperiani da 1 a 10000 con 8 decimali; i logaritmi de' seni e delle tangenti di 10 in 10 secondi pei 6 primi ed i 6 ultimi gradi, e di minuto in minuto per resto del quadrante, colle differenze; e molte altre tavole con una estesa introduzione su la natura, calcolo, ed uso dei logaritmi; perlochè un tal libro riesce utilissimo

per la matematica pratica: vi si trovano inoltre indicati gli errori delle principali tavole logaritmiche.

Ma queste non sono le sole tavole per cui Vega si è acquistato un diritto alla gratitudine degli astronomi: nel 1796 egli pubblicò il suo *Thesaurus logarithmorum completus* ec., *Lipsia* 1796 *in fog.*, il quale contiene 1.° i logaritmi naturali de' numeri da 1 a 101000 con 10 decimali, 2.° i logaritmi dei seni e delle tangenti di secondo in secondo pei 2 primi ed i 2 ultimi gradi, e di 10 in 10 secondi pel resto del quadrante, parimente con 10 decimali, e tutti colle loro differenze, 3.° un'Appendice contenente le formule per la risoluzione dei triangoli, ec., 4.° i logaritmi neperiani calcolati da Wolfram pei 10000 primi numeri con 48 decimali. Oltre a ciò trovasi a principio del libro una introduzione sull' uso di queste tavole.

68. Non trascureremo di rammentare le tavole pubblicate da Michele Taylor nell'anno 1792, come quelle che contengono i logaritmi dei seni e delle tangenti con otto decimali, di secondo in secondo per tutto il quadrante.

69. La divisione centesimale del quadrante che per completare la riforma delle antiche misure fu adottata dalla repubblica francese diè luogo al calcolo di nuove tavole logaritmico-trigonometriche ad essa divisione corrispondenti. Borda sembra essere stato il primo ad occuparsene in Francia; lo asserisce Callet (*) il quale ei avverte di più che il manoscritto delle tavole di Borda era al suo termine nell' anno 1792. Queste tavole furono poi arricchite di aggiunte e pubblicate nell' anno 1801 da Delambre, sotto il titolo di *Tables trigonométriques décimales*, ec. *Paris* an IX,

(*) *Tables portatives de log.* Paris 1795 p. VI.

in 4.° Esse ci offrono 1.° due prefazioni una dell' autore, l' altra dell' editore Delambre, nelle quali si trovano ampiamente esposti i metodi algebrici per la costruzione delle tavole, gli schiarimenti intorno al loro uso, e la Trigonometria rettilinea e sferica, 2.° i logaritmi dei numeri da 1000 sino a 100000 con 7 decimali estratti dalla edizione delle tavole di Gardiner fatta da Pezenas nel 1770, di cui abbiamo fatto parola qui sopra, 3.° i logaritmi dei numeri da 1 a 1000 e da 100000 a 102000 con undici decimali, 4.° i logaritmi dei seni e delle tangenti con 11 decimali di 10 in 10 secondi centesimali sino a 10 minuti, e di 10 in 10 minuti pel resto del quadrante, 5.° i logaritmi neperiani da 1 a 1000 con 11 decimali presi dalla tavola a 48 decimali di Wolfram, 6.° i logaritmi dei seni, secanti e tangenti con sette decimali di 10 in 10 secondi decimali sino a 10 minuti, e di 10 in 10 secondi colle parti proporzionali calcolate per ogni secondo sino al terzo grado, e di minuto in minuto colle parti proporzionali di 10 in 10 secondi pel resto del quadrante.

70. Le tavole trigonometriche decimali pubblicate da Hobert ed Ideler nel 1799 sono precisamente della stessa estensione di quelle di Borda, ma esse non contengono le secanti nè le parti proporzionali già calcolate; contengono però i valori dei seni e delle tangenti espressi in parti del raggio. Delambre ci attesta che queste tavole sono correttissime (*).

71. Ma le tavole di Callet che vennero la prima volta alla luce nell' anno 1795 col titolo *Tables portatives de logarithmes etc. Paris Didot* 1795, in 8.° presentano su quel-

(*) V. *Bordæ. Tables trigon.* Paris. an IX. p. 113.

le che abbiamo rammentate molti vantaggi per gli ordinarj calcoli ne' quali occorre fare uso de' logaritmi; vi sono le tavole trigonometriche relative alla divisione antica, e quelle che corrispondono alla nuova; oltracciò se ne consideriamo il merito tipografico, si può dire che fanno esse il più bell'elogio della stereotipia, e per quello che asseriscono i pratici sono estremamente corrette. Lalande dice (*) « elles ont été vérifiées encore une fois en 1802, et on « a tout lieu de croire qu' il n'y a plus de fautes ». L'edizione del 1803 comprende 1.° un discorso preliminare sopra la spiegazione e l'uso dei logaritmi con molte applicazioni all'Astronomia, alla Nautica ecc. 2.° i logaritmi de' numeri sino al 108000, numero di secondi sessagesimali contenuti in 30 gradi, 3.° i logaritmi briggianni e neperiani con 20 decimali dall' unità sino al 1200; altri briggiani con 61 decimali, e neperiani con 48 dall' unità al 1097; ove bisogna avvertire che dal 100 in poi non sono stati indicati che quelli dei numeri primi, 4.° i logaritmi dei seni e delle tangenti di diecimillionesimo in diecimillionesimo o di minuto in minuto, nuova divisione, 5.° i logaritmi dei seni e delle tangenti di secondo in secondo pei 5 primi gradi, e di 10 in 10 secondi, divisione sessagesimale, pel rimanente del quadrante.

72. In Italia furono un tempo stimate le *Tavole trigonometriche* di Giuseppe Toaldo già Professore di Astronomia nell'Università di Padova, le quali sono congiunte ad un trattato di Trigonometria elementare ed a varie utili spiegazioni su i logaritmi. Tratte quasi per intero dalle Tavole logaritmiche di Deparcieux hanno come queste il pregio di

(*) *Tables de log. par J. Lalande*. V. *Preface*.

essere estremamente corrette, ma contuttociò non sogliono i geometri farne uso a cagione della loro brevità; imperocchè contengono i logaritmi dei numeri sino al 10800 solamente, e quelli dei seni e tangenti di secondo in secondo pei dieci primi minuti, di dieci in dieci secondi pei quattro primi gradi, e di minuto in minuto per tutto il rimanente del quadrante.

73. Ora è d'uopo tener proposito della edizione italiana delle tavole di Gardiner; essa fra tutte le tavole che abbiamo annoverate è quella che ci sembra più conveniente ai principianti onde si rendano esperti nel calcolo logaritmico: e perciò noi abbiamo supposto che le operazioni logaritmico-trigonometriche che comporta il nostro *Saggio d'un trattato di Trigonometria* fossero eseguite con queste tavole alla mano. Le tre prime edizioni delle tavole medesime furono dirette dai PP. Canovai e del Ricco; la quarta poi, *Tavole logaritmiche* ecc., *Firenze*. *Stamperia Calasanziana*. 1827, si dee alle speciali cure del P. Inghirami, astronomo di chiaro nome, dal quale è stata ridotta a miglior forma, ed arricchita di nuovi preliminari: di più è accuratissima, e le tavole che contiene sono estese quanto occorre per gli usi ordinarj dei logaritmi; infatti esse comprendono 1.° i logaritmi ordinarj dei numeri dall' 1 al 1000 con 20 decimali, e quelli dei numeri primi compresi tra 1000 e 10141 parimente con 20 decimali, 2.° i logaritmi ordinarj dei numeri dal 1000 al 108000, con sette decimali, 3.° i logaritmi dei seni e tangenti di secondo in secondo pei 4 primi gradi, e di 10 in 10 secondi pel resto del quadrante. I preliminari poi si raggirano su la costruzione ed usi delle tavole logaritmiche e logaritmico-trigonometriche, e sono corredati d'una raccolta di formule d'Algebra, di Geo-

metria analitica, di Trigonometria piana e sferica, di Geodesia, di Astronomia sferica, planetaria e nautica, e di altri rami di Fisica-matematica, al calcolo delle quali sono applicabili i logaritmi o che coi logaritmi hanno comunque rapporto.

74. Termineremo facendo parola delle tavole pubblicate nel 1760 da La Caille e Lalande, e di cui Lalande medesimo nel 1805 ebbe cura di fare una edizione stereotipa molto corretta. Il volume in cui sono contenute, dimostra la loro ristrettezza; esso è in 18.° e di sole 214 pagine, e non vi si trovano che i logaritmi dei numeri dall' 1 al 10000 e quelli dei seni e delle tangenti di minuto in minuto sessagesimale; tutti espressi con cinque decimali soltanto. Laonde sembra che il loro uso dovrebbe esser limitato ai soli calcoli in cui non si richiede l'estrema esattezza; ma giovi sapere che Lalande nella prefazione apposta alle tavole medesime dice « J' ai calculé quelques centaines d' éclipses, « et je n' y ai presque jamais employé d' autres tables que « celles que je publie, parceque mon experience m' a fait « voir que l' on n' a presque jamais dans l'observation une « précision qui éxige d' autres tables ».

Nondimeno Marie e Reynaud riproducendo queste tavole nel 1829 (Paris, Bachelier) hanno stimato opportuno di estenderle a sette decimali, aggiungendovi una istruzione ove vengono indicati i limiti degli errori che possono risultare impiegando i logaritmi dei numeri e delle rette trigonometriche, che le medesime tavole somministrano.

NOTE

NOTA I.

Sopra il vocabolo Funzione.

Gli antichi matematici distinguevano col nome di *funzione* d' una quantità, le differenti potenze di essa. Dipoi questo vocabolo fu indistintamente applicato ai risultamenti delle diverse operazioni algebriche. Quindi si chiamarono funzioni di più quantità tutte le espressioni algebriche le quali contenevano delle somme, dei prodotti, dei quozienti, delle potenze e delle radici di questa quantità. Finalmente una espressione algebrica non fu reputata funzione d' una o più quantità, se non quando queste quantità erano *variabili*, cioè suscettibili di assumere qualunque valore.

Il d'Alembert (*) dice « si chiama *funzione* di x, ed in « generale d' una quantità qualunque, una quantità com- « posta di tanti termini quanti si vuole, e nella quale x si « trova in un modo qualunque combinata, o no con del- « le costanti ». Il Lagrange (**) dice « si chiama *funzione* « d' una o più quantità ogni espressione di calcolo nella « quale queste quantità entrano in un modo qualunque, « congiunte o no ad altre quantità che si considerano co-

(*) *Encyclop. méthodique*.
(**) *Théorie des Fonctions analitiques*.

« me aventi dei valori dati ed invariabili, mentrechè le « quantità della funzione possono ricevere tutti i valori « possibili ». Il Lacroix (*) poi si esprime così « ogni quan- « tità il cui valore dipende da una o più altre quantità è « detta *funzione* di queste, sia che si conoscano o che « s' ignorino le operazioni da farsi per risalire dalle quan- « tità medesime alla prima ». Dietro ciò le radici d' una equazione del quinto grado sebbene non si possano algebricamente assegnare, nello stato attuale dell' Algebra, pure sono da reputarsi funzioni dei coefficienti dell'equazione.

In tanta disparità di definizioni io mi sono attenuto all' idea più generale, ed ho fatto uso del vocabolo *funzione* ogniqualvolta ho avuto in mente d' indicare una espressione algebrica di più quantità della quale non potevasi indicare attualmente la forma; quindi sapendo che nella composizione d' una espressione qualunque dovevano entrare gli elementi a, b, c,.. ho detto essere l'espressione medesima funzione delle quantità a, b, c ... e colla lettera greca ϕ, ho indicata tal circostanza in questo modo

$$\phi(a, b, c \ldots).$$

È manifesto che una tale nozione comporta che gli elementi della funzione sieno costanti, o variabili, o in parte costanti ed in parte variabili.

Questo d' altra parte è il senso più generale in cui viene adoprato il vocabolo *funzione* dagli scrittori di libri elementari.

(*) *Traité de Calcul diff. et int.*

NOTA II.

Sopra l' omogeneità delle funzioni.

Le nozioni sopra l' omogeneità delle funzioni, esposte dal Signor Cauchy nel Cap. III. §. 3. del suo Corso d'Analisi, e dal Signor Poisson nella Introduzione al suo Trattato di Meccanica, mi hanno fatto nascere alcune idee che credo di dovere riferire a questo luogo a dilucidazione di ciò che ho detto sopra l'omogeneità, nel Cap. I della Introduzione.

Ordinariamente chiamasi funzione omogenea di più quantità a, b, c, ec., quella espressione algebrica i cui termini contengono un ugual numero delle quantità medesime come fattori: questo numero poi distinguesi col nome di *grado* o *dimensione* della funzione omogenea. Quindi è che se in una funzione omogenea delle quantità a, b, c, ec., cambieremo a in au, b in bu, c in cu, ec., ogni suo termine risulterà moltiplicato per una potestà di u, per es. u^n, indicata dalla dimensione n della funzione medesima. Ciò ne conduce ad assegnare in un modo più preciso il criterio della omogeneità delle funzioni: poichè se dopo la sostituzione indicata, tutti i termini d'una funzione omogenea risultano moltiplicati per u^n, segue che la stessa funzione risulterà moltiplicata per la medesima potestà; laonde è chiaro che una funzione dovrà reputarsi omogenea e del grado n tostochè, indicando con u una quantità qualunque, per la sostituzione di au in luogo di a, di bu in luogo di b, di cu in luogo di c, ec., essa si cambierà in altra funzione che abbia colla prima il rapporto indicato da u^n; o in altri termini

$$\phi(a, b, c, ..)$$

sarà funzione omogenea del grado n rapporto alle quantità a, b, c, ec., allorquando avremo, qualunque sia u,

$$\phi(au, bu, cu, ..) = u^n \phi(a, b, c, ...) . \quad (1)$$

Laonde

$$a^2 + ab + b^2, \qquad \frac{a^3 + ab^2}{a+b},$$

le quali si cambiano in

$$u^2(a^2 + ab + b^2), \qquad u^2 \frac{a^3 + ab^2}{a+b},$$

saranno funzioni omogenee del 2° grado, ovvero di due dimensioni;

$$a+b, \qquad \sqrt{ab}, \qquad \frac{ab}{a+b},$$

le quali si cambiano in

$$u(a+b), \qquad u\sqrt{ab}, \qquad u\frac{ab}{a+b},$$

saranno funzioni omogenee del 1.° grado, o di una dimensione, ovvero, come altrimenti si dice, *funzioni lineari*;

$$\log a - \log b, \qquad \frac{a}{b}, \qquad \frac{a+b}{a}$$

le quali per la stessa sostituzione non vanno soggette ad alcun cambiamento, lo che si può algebricamente esprimere dicendo che risultano moltiplicate per u^0, saranno funzioni omogenee d'un grado nullo, o della dimensione zero.

È manifesto che le funzioni fratte non potranno essere omogenee se non quando saranno partitamente omogenei il numeratore ed il denominatore: quindi il loro grado sarà indicato dall'eccesso del grado del numeratore sopra quello del denominatore. Adunque la frazione omogenea

$$\frac{a^2 + ab}{a^4 + ab^3}$$

sarà del grado — 2. Infatti questa frazione si cambia in

$$\frac{1}{u^2} \cdot \frac{a^2 + ab}{a^4 + ab^3},$$

ovvero in $$u^{-2} \cdot \frac{a^2 + ab}{a^4 + ab^3}.$$

Osservando che l'equazione (1) dee sussistere per qualunque valore di u, ne sarà concesso di sostituire $\frac{1}{u}$, ad u; perlochè avremo

$$\varphi(a, b, c, \ldots) = u^n \left(\frac{a}{u}, \frac{b}{u}, \frac{c}{u}, \ldots\right) \qquad (11)$$

donde risulta che *una funzione omogenea delle quantità* a, b, c, ec., *del grado* n *può considerarsi come equivalente ad una funzione de' rapporti* $\frac{a}{u}$, $\frac{b}{u}$, $\frac{c}{u}$, ec., *moltiplicata per la* n^{ma} *potestà di* u.

Nella equazione (11) u può farsi eziandio uguale ad una delle quantità a, b, c ec.; ed ove u sia fatto ex: gr: uguale ad a, trovasi

$$\phi(a, b, c, \ldots) = a^n \left(1, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \ldots\right)$$

ove si scorge che *una funzione omogenea delle quantità* a, b, c, *ec., del grado* n *è uguale alla* n^{ma} *potenza di una di queste quantità, per es:* a, *moltiplicata per una funzione de' rapporti delle altre quantità con* a.

Viceversa *qualunque funzione de' rapporti* $\frac{a}{u}$, $\frac{b}{u}$, $\frac{c}{u}$, ec., *sarà omogenea rapporto alle quantità* u, a, b, c, *ec.*

Infatti suppongasi che questa funzione sia moltiplicata per u^n; in generale sarà

$$u^n \phi\left(\frac{a}{u}, \frac{b}{u}, \frac{c}{u} \ldots\right) = \phi(u, a, b, c \ldots);$$

e questa equazione dovrà sussistere per qualunque valore di u, a, b, c, ec.; sostituiscasi adunque uv ad u, av ad a, bv a b, ec.; avremo

$$u^n v^n \phi\left(\frac{a}{u}, \frac{b}{u}, \frac{c}{u}, \ldots\right) = \phi(uv, av, bv, cv, \ldots)$$

ovvero

$$v^n \phi(u, a, b, c \ldots) = \phi(uv, av, bv, cv, \ldots);$$

donde risulta che

$$\phi(u, a, b, c \ldots)$$

ovvero $$u^n \phi\left(\frac{a}{u}, \frac{b}{u}, \frac{c}{u} \ldots\right)$$

debb' essere funzione omogenea. Ora se supponiamo che ogni termine di quest' ultima sia diviso per u^n, essa diverrà

$$\phi\left(\frac{a}{u}, \frac{b}{u}, \frac{c}{u}, \ldots\right)$$

e si manterrà omogenea; ragione per cui i rapporti

$$\frac{a}{u}, \frac{b}{u}, \frac{c}{u} \ldots$$

comunque combinati tra loro somministrano sempre una funzione omogenea, come in altro modo è stato dimostrato al n.° 12.

Nasce da ciò un teorema più generale, quello che ho enunciato al n.° 13, in virtù del quale *qualunque funzione*

de' rapporti della quantità a, b, c, d, *ec., combinate due a due è da reputarsi omogenea.*

Infatti tutti questi rapporti si possono esprimere per mezzo di quelli che hanno per denominatore a; $\frac{b}{c}$ per es., si può esprimere colla espressione identica

$$\frac{\left(\frac{b}{a}\right)}{\left(\frac{c}{a}\right)}$$

per cui una funzione de' rapporti

$$\frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \ldots \quad \frac{b}{a}, \frac{b}{c}, \ldots \quad \frac{c}{a}, \frac{c}{b}, \ldots$$

si può considerare come una funzione de' rapporti

$$\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a} \ldots ;$$

adunque essa sarà omogenea.

Da ciò segue come ho avvertito al n.° 14, che *qualunque funzione di più quantità* a, b, c, *ec., diviene omogenea tostochè si sostituiscono alle quantità medesime i rapporti* $\frac{a}{u}$, $\frac{b}{u}$, $\frac{c}{u}$ ec.; e poichè u può avere qualunque valore, ed essere eziandio uguale ad una delle quantità a, b, c, ec., nel qual caso i detti rapporti si cambiano in $1, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \ldots$; perciò potremo stabilire che *una funzione qualunque di più quantità* a, b, c, ... *può rendersi omogenea facendo* $= 1$ *una di queste quantità presa a piacere, e dividendo per la quantità medesima tutte le altre.*

Aggiungerò che *una funzione delle quantità* a, b, c, . . . *dee necessariamente essere omogenea quando esprimendo con* u *un numero preso a piacere, per la sostituzione di* au *ad* a, bu *a* b, cu *a* c, ec., *essa tuttavia sussiste*.

Infatti sia $\phi(a, b, c, \ldots) = 0$;

se sarà $\phi(au, bu, cu, \ldots) = 0$,

l'equazione

$$\phi(a, b, c, \ldots) = \phi(au, bu, cu, \ldots),$$

dovrà risultare identica, e dovrà essere verificata da qualunque valore di u. Si faccia adunque $u = \frac{1}{a}$ avremo

$$\phi(a, b, c, \ldots) = \phi\left(1, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \ldots\right)$$

donde risulta che la funzione di $a, b, c \ldots$ allorchè soddisfà all'indicata condizione non può non essere omogenea. Così dopo la sostituzione di $au, bu, cu \ldots$ in luogo di $a, b, c \ldots$ la funzione $\phi(a, b, c \ldots)$ risulterà moltiplicata per una certa potenza di u, e quindi questa potenza potrà essere eliminata dalla equazione

$$u^n \phi(a, b, c \ldots) = 0$$

colla divisione. Ond'è che nella equazione

$$\phi(au, bu, cu \ldots) = 0$$

la presenza di u è soltanto apparente.

Esposte le precedenti proprietà delle funzioni omogenee sarà facile assegnare le condizioni a cui dee soddisfare una equazione allorquando esprime la legittima traduzione algebrica d'un problema qualunque.

Supponiamo che $a, b, c, \ldots$ sieno i rapporti di più linee A, B, C, . . . colla loro unità U, e che esse debbano essere tra loro collegate mediante l'equazione

$$\phi(a, b, c \ldots) = 0$$

Ora cambiando la grandezza dell' unità U, i numeri $a, b, c \ldots$ varieranno in ragione inversa di questa grandezza, e malgrado questo cambiamento affatto arbitrario, le equazioni dovranno tuttavia sussistere; supponendo per es. che l' unità diminuisca nel rapporto 1 ad m, i numeri $a, b, c \ldots$ diverranno $am, bm, cm, \ldots$ e l' equazione precedente dovrà nondimeno verificarsi, cioè dovremo avere

$$\phi(am, bm, cm \ldots) = 0$$

adunque è d' uopo che l' equazione $\phi(a, b, c \ldots) = 0$ sia omogenea rapporto alle quantità $a, b, c \ldots$

Nello stesso modo si può dimostrare che *qualunque equazione tra quantità di più specie debb' essere omogenea, ed esserlo separatamente rispetto ad ogni specie delle medesime*.

Supponiamo che per l' applicazione dell' Algebra ad un problema in cui vuolsi che si mettano in calcolo le linee $a, b, \ldots$ i pesi $p, p' \ldots$ di più corpi, le loro masse $m, m' \ldots$ ec., siasi ottenuta l' equazione

$$\phi(a, b \ldots p, p' \ldots m, m' \ldots) = 0$$

È manifesto che essa dovrà tuttavia sussistere anche nel caso in cui si cambi l' unità di misura lineare, l' unità di peso, l' unità di massa, ec; adunque, supponendo che l' unità lineare diminuisca nella ragione di 1 a n, l' unità di peso nella ragione di 1 ad n', l' unità di massa nella ragione di 1 ad n'', ec. dovremo avere

$$\phi(an, bn \ldots p, p' \ldots m, m' \ldots) = 0$$
$$\phi(a, b \ldots pn', p'n' \ldots m, m' \ldots) = 0$$
$$\phi(a, b \ldots p, p' \ldots mn'', m'n'' \ldots) = 0$$

le quali equazioni non potrebbero esser soddisfatte, ove l' equazione dataci dal problema non fosse omogenea rapporto ad a, b... rapporto $a\,p$, p'... rapporto ad m, m'... e così rapporto ad ogni specie di quantità. Non soddisfacendo essa a questa condizione sarebbe assurda.

Da ciò segue che una equazione contenente due sole quantità a, b d' una medesima specie può sempre supporsi della forma

$$a = k\,b$$

essendo k una funzione omogenea delle altre quantità.

Talvolta sembra che l' equazione dell' omogeneità non possa aver luogo; ma ciò avviene come abbiamo osservato al n.° 14 ogniqualvolta si prende per unità lineare una delle rette su le quali si raggira il quesito, ovvero il peso d' uno dei corpi, o una delle masse che debbono entrare in calcolo, o in generale una delle quantità che possono figurare nella equazione.

Allorquando l' equazione conterrà delle linee, delle superficie, e dei volumi, per giudicare della sua omogeneità converrà considerare di due dimensioni ogni quantità esprimente una superficie, e di tre dimensioni ogni quantità esprimente un volume.

Ed è chiaro che mentre le linee a, b...., diminuendo l'unità lineare nella ragione di 1 ad n, diverranno $a\,n$, $b\,n$..., le superfici a', b'... riferite al quadrato di essa unità diverranno $a'\,n^2$, $b'\,n^2$..., ed i volumi a'', b''... riferiti al cubo dell' unità medesima diverranno $a''\,n^3$, $b''\,n^3$.... Ciò basta onde la teoria delle funzioni omogenee non possa presentare alcuna difficoltà.

NOTA III.

Sopra la costruzione delle formule a due, e tre dimensioni.

Raramente avverrà che si debbano costruire furmule a due o tre dimensioni, poichè ogniqualvolta ci vien proposto di determinare l'area d'una superficie, o il volume d'un solido, riduciamo la ricerca a quella delle loro dimensioni; nondimeno non sarà inopportuno indicare alcune particolarità di queste costruzioni.

È chiaro che l'oggetto della costruzione d'una formula S a due dimensioni è di determinare una superficie di cui essa formula possa esprimere l'area. Adunque qualunque ne sia l'espressione dovremo in generale decomporla in due fattori *lineari* m, n, uno de' quali potrà esprimere la base, l'altro l'altezza del rettangolo, la cui area ha il valore indicato da S; cioè converrà ridurla ad

$$S = mn;$$

è facile vedere che questa decomposizione di S potrà farsi in varie guise; per cui le costruzioni dei fattori m ed n si potranno in generale cambiare in molti modi.

La formula $$\frac{abcd}{ef}$$

si può decomporre ne' due fattori $\frac{ab}{e}$, $\frac{cd}{f}$; il primo dei quali esprime una quarta proporzionale dopo a, b, e; l'altro una quarta proporzionale dopo c, d, f.

La formula

$$\sqrt{abcd},$$

si decompone ne' due fattori $\sqrt{ab}$, $\sqrt{cd}$; il primo è una

media proporzionale tra a e b; l'altro una media tra c e d. La formula

$$a^2 + b^2$$

si potrebbe decomporre ne' due fattori a ed $a + \frac{b^2}{a}$; ma in questo caso tal decomposizione riesce inutile, vedendosi chiaramente che l'area richiesta è quella del quadrato fatto sopra l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo i cui cateti sono a e b.

Nelle formule a due dimensioni ottenute per la traduzione di qualche problema geometrico si scorgono talvolta delle rimarchevoli proprietà delle superficie. Ecco un problema tratto dall'*Applicazione dell'Algebra alla Geometria* del Signor Develay, il quale dà occasione ad una singolare proposizione relativa al triangolo.

Trovare la superficie S *d'un rettangolo di cui si conosce il perimetro* c, *e la diagonale* d.

Sieno x ed y l'altezza, e la base del rettangolo: avremo

$$x + y = \frac{c}{2}, \quad x^2 + y^2 = d^2;$$

e quadrando la prima,

$$x^2 + 2xy + y^2 = \frac{c^2}{4};$$

ovvero

$$2S + d^2 = \frac{c^2}{4}$$

e quindi

$$S = \frac{c^2}{8} - \frac{d^2}{2},$$

donde segue che *la superficie d'un rettangolo è equivalente all'ottava parte del quadrato del perimetro, meno la metà del quadrato della diagonale.*

L'oggetto poi della costruzione d'una formula V a tre dimensioni è di determinare un solido di cui essa formula possa esprimere il volume. Perciò qualunque sia l'espressione di questa formula sarà d'uopo decomporla in tre fattori *lineari* m, n, p, i quali potranno esprimere le dimensioni del parallelepipedo il cui volume è indicato da V; cioè converrà ridurla a

$$V = mnp;$$

e poichè questa decomposizione potrà farsi in varie guise, segue che le costruzioni parziali dei fattori m, n, p, potranno cambiarsi generalmente in molti modi.

Il problema seguente tratto dall'*Applicazione dell'Algebra alla Geometria* del Signor Lacroix dimostra che nelle formule a tre dimensioni si scorgono talvolta delle singolari proprietà dei solidi.

Trovare il volume d'un tronco di piramide o di cono, conoscendone l'altezza g, *e le basi* S *ed* s.

Indichiamo con a e b due lati omologhi delle basi del tronco di piramide, o i raggi di quelle del tronco di cono; con h l'altezza della piramide o del cono intero. Sarà

$$a - b : a :: g : h \text{ ed } h = \frac{ag}{a-b}:$$

L'altezza della piramide sottratta sarà poi

$$h - g = \frac{bg}{a-b}.$$

Or poichè S ed s son simili, avremo

$$S : a^2 = s : b^2$$

ed indicando con m il rapporto di S ad a^2, otterremo

$$S = a^2 m, \quad s = b^2 m,$$

cosicchè i volumi del corpo intero, e del corpo sottratto saranno respettivamente indicati da

$$\frac{1}{3}hS=\frac{1}{3}\cdot\frac{mga^2}{a-b},\ \frac{1}{3}(h-g)s=\frac{1}{3}\cdot\frac{mgb^2}{a-b};$$

quindi sottraendo la seconda espressione dalla prima, avremo finalmente il volume del tronco, il quale sarà

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{mg(a^3-b^3)}{a-b}=\frac{1}{3}mg(a^2+ab+b^2)$$

ovvero

$$\frac{1}{3}g(a^2m+abm+b^2m)=\frac{1}{3}gS+\frac{1}{3}gs+\frac{1}{3}g\sqrt{Ss}$$

donde segue che *il volume d'un tronco di piramide o di cono è uguale alla somma di tre piramidi, o di tre coni, aventi per altezza quella stessa del tronco, e per basi il primo la base inferiore del tronco stesso, l'altro la base superiore, il terzo una base media proporzionale tra queste due.*

NOTA IV.

Sopra il concetto fondamentale della Trigonometria.

Dopo aver fatto osservare che la Trigonometria non poteva giungere al suo fine, il quale è quello di effettuare la risoluzione dei triangoli per mezzo del calcolo, senza conoscere i rapporti dei lati d'un triangolo coi suoi tre angoli, mi son fatto a determinare in primo luogo questi rapporti; e non potendo istituire direttamente il confronto fra i lati e gli archi che servono di misura agli angoli, stantechè essi sono elementi eterogenei, ho preso ad indagare un mezzo di comunicazione tra loro. Questo è stato trovato nei *seni degli archi* i quali costituiscono tale ordine

di rette invariabili rapporto agli archi cui appartengono, e che hanno coi lati del triangolo un rapporto facile a determinarsi: perlochè *l'invenzione dei seni* è da reputarsi come il concetto fondamentale della Trigonometria.

Tal concetto è stato in varj modi spiegato: io mi sono attenuto ad una spiegazione semplice ed analitica la quale piuttosto sotto l'aspetto d'indagine, che di dimostrazione, si presenta.

La spiegazione del Signor Lacroix sopra l'origine dei seni è pure analitica, ed è semplicissima; ma avendo osservato che essa non conduceva immediatamente al principio della proporzionalità dei lati del triangolo coi seni degli angoli opposti, o che almeno non avea in vista l'invenzione immediata di questo principio, ho dovuto non farne alcun uso, poichè non avrebbe potuto servire di fondamento al mio piano. Nondimeno essa è sì luminosa ed è stata sì egregiamente sviluppata dall'illustre Carnot, ch'io credo di non doverla trascurare.

« La Trigonometria, dice il Signor Lacroix (*), sostituisce il calcolo, a quelle geometriche costruzioni colle quali essendo date tre parti d'un triangolo si determinano le altre tre; ed essa giunge a questo fine determinando in un circolo di un dato raggio, una serie di triangoli rettangoli formati sopra tutti i possibili angoli acuti, in modo che tra essi se ne trovi sempre uno simile a quello che si propone di risolvere: delle semplici proporzioni tra i lati di questi due triangoli, bastano a determinare le parti ignote del secondo mediante le parti omologhe del primo. In quanto ai triangoli obliquangoli, la loro

(*) *Éssais sur l'enseignement*. Paris 1828, pag. 326.

risoluzione ricavasi facilmente da quella dei triangoli rettangoli. Laonde tutto si riduce alla formazione d'una tavola che contenga le parti dei triangoli rettangoli summentovati.»

Questa ingegnosa idea che il signor Lacroix ha ampiamente spiegata nel suo *Trattato elementare di Trigonometria* è stata dipoi sviluppata dal Carnot (*) nel seguente modo.

« L'invenzione delle quantità lineo-angolari, altrimenti dette linee trigonometriche, deve la sua nascita agli sforzi che sono stati fatti per trovare la risoluzione dei triangoli. Presto si potè conoscere che questa risoluzione si riduceva in generale a quella dei triangoli rettangoli. Fu adunque preso per termine di confronto un triangolo rettangolo, la cui ipotenusa, per esempio, fosse rappresentata dall' unità: dipoi fu calcolato questo triangolo per tutti i casi possibili, dietro questa ipotesi, e furono formate delle tavole contenenti i risultamenti di questo calcolo: queste sono quelle che si chiamano *tavole dei seni*. »

« Sia BC (fig. 72) una retta qualunque presa per termine di confronto: si rappresenti questa retta con 1, e sopra di essa si costruisca un triangolo rettangolo ABC attribuendo ai suoi angoli acuti tutti i valori possibili da o fino all' angolo retto. Formiamo dipoi una tavola di tutti questi triangoli; scriviamo nella prima colonna il numero dei gradi di uno degli angoli acuti; nella seconda il valore del cateto opposto, cioè il numero astratto che lo rappresenta, quando l'ipotenusa, come abbiamo supposto, si prende per unità; nella terza il valore dell' altro cateto; nella quarta il rapporto del primo di questi cateti al secondo; nella quinta il rapporto del secondo al primo; finalmente nella sesta

(*) *Géométrie de position*. Paris an XI, pag. 148.

l'altro angolo acuto. Ciò posto le proprietà cognite del triangolo rettangolo dimostrano che il numero scritto nella seconda colonna è il *seno* dell'angolo scritto nella prima; che quello della terza n'è il *coseno;* quello della quarta la *tangente;* quello della quinta la *cotangente;* finalmente il sesto ed ultimo numero è il complemento dell'angolo indicato dal primo ».

« Da ciò segue che la tavola costituita di queste diverse colonne, non è che l'ordinaria tavola dei *seni, coseni,* ec., e che ogni linea orizzontale di questa tavola rappresenta la risoluzione completa di un triangolo rettangolo; di quello cioè cui appartengono i due angoli acuti posti uno nella prima, l'altro nell'ultima colonna; e che finalmente questa linea orizzontale contiene non solo sotto i nomi di *seno*, e *coseno*, i valori dei cateti del triangolo, ma eziandio sotto il nome di *tangente* il rapporto del primo al secondo, e sotto quello di *cotangente* il rapporto del secondo al primo; dimanierachè la tavola dei *seni*, *coseni* ec., non è altro che la completa risoluzione del triangolo rettangolo la cui ipotenusa è espressa dall'unità, per tutti i casi possibili in cui esso triangolo si può trovare ».

« Adunque la risoluzione di un triangolo rettangolo, si riduce alla ricerca di quella linea orizzontale della tavola, che ad esso corrisponde. Per es. se fossero dati i due cateti a, b di un triangolo rettangolo, converrebbe dividere a per b; ed il quoziente $a : b$ esprimerebbe, dietro ciò che abbiamo detto, la *tangente* dell'angolo opposto al cateto a. Ricercando adunque questo quoziente nella quarta colonna, la linea orizzontale della tavola in cui esso si troverà indicherà tutti gli altri elementi del triangolo proposto; cioè nella prima, e nella sesta colonna avremo gli angoli acuti;

nella seconda e nella terza, i valori dei lati respettivamente opposti a questi angoli, supponendo l'ipotenusa rappresentata dall' unità; finalmente nella quarta il rapporto del primo cateto al secondo, e nella quinta quello del secondo al primo; e siccome il valore assoluto dei lati è per ipotesi dato, avremo il valore assoluto dell' ipotenusa mediante una semplice proporzione ».

« Così le tavole dei seni danno la risoluzione di tutti i triangoli rettangoli possibili; e stantechè la risoluzione di tutti gli altri triangoli si può sempre ridurre a quella dei triangoli rettangoli, segue che colla tavola dei seni si può effettuare la risoluzione di qualunque triangolo. »

NOTA V.

Sopra il seno-verso, ed il coseno-verso.

In alcuni trattati di Trigonometria si fa parola del *seno-verso* e del *coseno-verso* che sono altre due rette trigonometriche di cui converrà che si dica alcuna cosa.

Chiamasi seno-verso dell'arco NM (fig 20) la distanza NP dell' origine di esso arco al piede del suo seno: il coseno-verso poi dell' arco medesimo non è che il seno-verso DQ del suo complemento DM. Laonde è chiaro che il seno-verso è indicato dalla differenza tra il raggio ed il coseno; e che il coseno-verso lo è dalla differenza tra il raggio ed il seno: per cui indicando con a un arco qualunque e colle abbreviature *sen. v.*, *cos. v.* il suo seno-verso, ed il suo coseno-verso, potremo stabilire queste formule

$$\text{sen. v. } a = 1 - \cos a,$$

$$\cos \text{. v. } a = 1 - \text{sen } a.$$

Essendo dato il seno-verso di un arco, le due formule

$$\text{sen}\, a = \sqrt{(2\,\text{sen. v.}\, a - \text{sen. v.}^2\, a)}\,,\ \cos a = 1 - \text{sen. v.}\, a$$

somministreranno immediatamente il suo seno ed il suo coseno; quindi dalle formule (II) a (V) n.° 64 ne potremo agevolmente dedurre la tangente, la cotangente, la secante e la cosecante.

NOTA VI.

Sopra i segni delle rette trigonometriche.

Sebbene io ritenga che la teoria delle figure correlative, ove sia convenientemente spiegata in tutte le sue particolarità, possa sola bastare ad indicare il vero ufficio de' segni nell'applicazione dell'Algebra alla Geometria, nondimeno riferirò alcune idee del Signor Cauchy sopra il medesimo argomento, estratte dalla sua teoria delle quantità negative (*).

Una grandezza, dice il Signor Cauchy, presa sopra una linea data retta o curva, può essere rappresentata talora da un numero, e talora da una quantità positiva o negativa; da un numero, allorquando si ha in vista la misura soltanto di questa lunghezza; da una quantità positiva o negativa, quando s'intende che essa sia portata sopra la linea data a destra o a sinistra d'un punto dato, per servire all'aumento o alla diminuzione di un'altra lunghezza costante, la quale ha una delle sue estremità in questo punto. Il punto fisso di cui si tratta, e partendo dal quale si contano le lunghezze variabili rappresentate da quantità

(*) *Cours d'Analyse*. V. Note I^a.

positive o negative è ciò che si chiama *origine* di queste lunghezze. Due lunghezze contate sopra una linea in sensi contrarj partendo dalla stessa origine, debbono essere rappresentate da quantità aventi segni contrarj. È in nostro arbitrio la scelta del senso secondo il quale debbonsi valutare le lunghezze designate da quantità positive; ma tostochè questa scelta si è fatta, bisogna necessariamente prendere nel senso opposto le lunghezze designate da quantità negative.

In un circolo il cui piano si suppone verticale, si fissa ordinariamente l'*origine* degli archi all'estremità N (fig. 73) del raggio tirato orizzontalmente da destra a sinistra: e partendo da questa origine gli archi si considerano come positivi o come negativi, secondochè per descriverli è d'uopo inalzarsi al di sopra di essa origine, o abbassarsi al di sotto.

Ciò posto, passiamo all'esame delle linee trigonometriche; ed a tale oggetto consideriamo un solo arco NM $= a$.

Primieramente osserveremo che il Signor Cauchy considera le linee trigonometriche d'un arco, nel concetto delle seguenti definizioni.

1.° Il *seno* d'un arco è la projezione di questo arco sopra il diametro verticale DC; nello stesso tempo esso è la projezione, sopra lo stesso diametro, del raggio che passa per l'estremità M dell'arco.

2.° Il *seno-verso* d'un arco è la projezione di questo arco sopra il diametro orizzontale NA.

3.° La *tangente* d'un arco è la parte della tangente indefinita KK′ condotta in N origine degli archi, intercetta fra l'origine medesima, ed il punto d'incontro di essa tangente col prolungamento del raggio che passa per l'estremità dell'arco.

4.° La *secante* d'un arco è la lunghezza contata sopra il raggio prolungato fra il centro, ed il punto d'incontro della tangente.

Ora è chiaro che il seno di un arco dovrà contarsi sul diametro verticale DC, il seno-verso sul diametro orizzontale NA, la tangente sopra l'indefinita tangente KK' condotta per l'origine N degli archi, e la secante sopra il diametro mobile che passa per l'estremità dell'arco dato.

Di più è manifesto che i seni, e le secanti hanno la loro comune origine nel centro del circolo, e che l'origine delle tangenti, e dei seni-versi si confonde colla origine degli archi.

Ciò posto conviene avvertire che per convenzione si debbono considerare come positive le linee rette trigonometriche degli archi positivi e minori del quadrante; donde segue che tutti gli archi i quali hanno la loro origine in N e la loro estremità sul primo quadrante avranno le loro linee trigonometriche rappresentate da quantità positive: e poichè quanto più l'estremità d'uno di questi archi si avvicina a D, tanto più le estremità del seno, del seno-verso, della tangente, e della secante si allontanano dalla loro respettiva origine nel senso delle linee BD, NB, NU e BV, adunque si dovranno contare positivamente 1.° il seno e la tangente, dal basso all'alto, 2.° il seno-verso, da sinistra a destra, 3.° la secante, nel senso del raggio condotto all'estremità dell'arco.

Ora supponiamo che l'estremità M dell'arco passi successivamente nel 2.°, 3.° e 4.° quadrante.

Partendo da'principj precedenti sarà facile riconoscere che il seno-verso si manterrà sempre positivo.

positive o negative è ciò che si ch[illegible] tangente ne-
lunghezze. Due lunghezze contat[illegible] tangente po-
contrarj partendo dalla stessa c[illegible]
presentate da quantità avent[illegible] tangente ne-
arbitrio la scelta del senso [illegible]
tare le lunghezze designat[illegible] *a*, la sua *cotan-*
chè questa scelta si è f[illegible] o che il seno e seno-
dere nel senso oppos[illegible] del suo complemento.
negative.

In un circolo il [illegible] no che compete al coseno,
ordinariamente l'[illegible] nte, ed alla cosecante d'un ar-
del raggio tira[illegible] segno del seno, del seno-*verso*,
tendo da qu[illegible] secante del complemento di esso. E
sitivi o com[illegible] rvare che quando *a* è minore del qua-
inalzarsi [illegible] mplemento è positivo; e considerando que-

Ciò p[illegible] e *a* ed il suo complemento, come aventi la co-
che; e[illegible] gine in N, le loro estremità si troveranno sul pri-
Pr[illegible] adrante. Quando poi *a* è maggiore del quadrante,
der[illegible] o complemento è negativo, e si dovrà contare al di
s[illegible] to del diametro orizzontale partendo dalla origine N: ed
[illegible] manifesto che in tal caso l'estremità di *a* si allontanerà
di tanto da D, di quanto l'estremità del complemento si allontanerà negativamente da N; cosicchè allorquando l'estremità di *a* sarà nel 2.°, o 3.°, o 4° quadrante, l'estremità del suo complemento sarà respettivamente nel 4.°, o 3.°, o 2.°. Laonde il coseno-verso sarà sempre positivo.

Nel 1.° quadrante, il coseno, la tangente, e cosecante saranno positivi.

Nel 2.° quadrante sarà il coseno negativo, la cotangente negativa, e la cosecante positiva.

Nel 3° quadrante sarà, il coseno negativo, la cotangente positiva, e la cosecante negativa.

Nel 4° quadrante sarà il coseno positivo, la cotangente negativa, la cosecante negativa.

Ed ora si potrà considerare come dimostrato il seguente quadro.

	1.° quadrante	2.° quadrante	3.° quadrante	4.° quadrante
sen. e cosec.	+	+	—	—
cos. e sec.	+	—	—	+
tang. e cot.	+	—	+	—

ove si può osservare che il segno della tangente è sempre il prodotto del segno del seno, pel segno del coseno.

I segni delle linee trigonometriche del complemento si potevano d' altra parte determinare, osservando che il coseno d'un arco non è che la projezione del raggio che passa per la sua estremità sul diametro orizzontale, e che in coerenza della primitiva convenzione, esso debbe contarsi positivamente sopra questo diametro da destra a sinistra partendo dal centro, preso per origine; che il coseno verso può esser misurato sul diametro verticale fra il punto D preso per origine e l' estremità del seno; che la cotangente non è che la tangente orizzontale condotta pel punto D, prolungata sino all' incontro del prolungamento del raggio condotto all' estremità dell' arco, e che essa dee contarsi positivamente da destra a sinistra; finalmente che la cosecante è lo stesso raggio prolungato sino all' incontro della cotangente, dovendosi contare positivamente nel senso del raggio di cui si tratta, allorchè passa per l' estremità dell' arco, e partendo dal centro come origine.

NOTA VII.

Sopra gli archi complementarj o supplementarj.

Dopo avere spiegato, come abbiamo fatto al n.° 68, e come comportano le convenzioni esposte nella precedente nota, cosa debba intendersi per arco negativo, la definizione degli archi complementarj o supplementari può riuscire assai più generale e più esatta di quella che abbiamo indicata al n.° 54. Gli archi

$$\frac{1}{2}\pi - a, \quad \pi - a$$

i quali aggiunti successivamente ad a danno un quadrante, e due quadranti, sono respettivamente il *complemento* ed il *supplemento* di a: or queste condizioni sono soddisfatte anche nel caso in cui, essendo a negativo, si cambia nelle dette espressioni il segno di a; inoltre $\frac{1}{2}\pi$ e π possono essi pure essere negativi; adunque l'arco rappresentato dalla quantità positiva o negativa a sarà *complemento* o *supplemento* dell'arco rappresentato dalla quantità positiva o negativa b, secondochè avremo

$$a + b = \pm\frac{1}{2}\pi, \quad a + b = \pm\pi.$$

Ciò posto convenendo d'indicare colle caratteristiche

ar. sen. m ar. tang. m ar. sec. m

ar. cos. m ar. cot. m ar. cosec. m

un arco di cui la quantità m rappresenta il seno, o la tangente, o la secante, o il coseno, o la cotangente, o la cosecante, potremo dedurre dalle condizioni

$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi - a\right) = \operatorname{sen} a = m$$

$$\cot\left(\frac{1}{2}\pi - a\right) = \operatorname{tang} a = m$$

$$\operatorname{cosec}\left(\frac{1}{2}\pi - a\right) = \sec a = m$$

le seguenti formule

$$\text{ar. cos. } m + \text{ar. sen. } m = \frac{1}{2}\pi \qquad (1)$$

$$\text{ar. cot. } m + \text{ar. tang. } m = \frac{1}{2}\pi \qquad (2)$$

$$\text{ar. cosec. } m + \text{ar. sec. } m = \frac{1}{2}\pi \qquad (3)$$

ove s'intende che le linee trigonometriche sieno quelle dei più piccoli archi ai quali, in quel dato valore di m, possono competere.

Ora si osservi che i più piccoli archi complementarj i quali abbiano seni negativi sono $\frac{1}{2}\pi + a$ e $-a$; rispetto ai quali si ha

$$-\cos\left(\frac{1}{2}\pi + a\right) = -\operatorname{sen}(-a) = m$$

donde si vede che l'equazione (1) si può estender anco al caso in cui m è negativo.

I più piccoli archi complementarj i quali abbiano tangenti negative sono $-\frac{1}{2}(\pi - a)$, e $-a$; per cui si ha

$$-\cos-\left(\frac{1}{2}\pi - a\right) = -\operatorname{tang} - a = m;$$

e quindi $\qquad \text{ar. cos. } m + \text{ar. tang. } m = -\frac{1}{2}\pi \qquad (4)$

essendo m negativo.

Finalmente i più piccoli archi complementarj che abbia-

no secanti negative sono $\pi + a$, e $-(\frac{1}{2}\pi + a)$; cosicchè abbiamo

$$-\operatorname{cosec}(\pi + a) = -\sec -(\frac{1}{2}\pi + a) = m$$

donde si fà manifesto che l' equazione (3) può estendersi anco al caso in cui m è negativo.

Adunque nel supposto che la linea trigonometrica m sia quella dell' arco positivo o negativo che ha il più piccolo valore numerico, avranno luogo le formule (1) e (3) per m positivo e negativo, la formula (2) avrà luogo per m positivo, e la formula (4) per m negativo.

NOTA VIII.

Sopra i diversi archi che corrispondono ad una data retta trigonometrica.

L' Algebra ci somministra non pochi esempj dai quali apparisce che il risultato d' una operazione eseguita sopra una quantità ha spesse volte più valori differenti tra loro. Così estraendo la radice quadrata da a abbiamo $+\sqrt{a}$ e $-\sqrt{a}$. Ad indicare indistintamente uno qualunque di questi valori il Signor Cauchy si vale di due doppie parentesi tra le quali pone la quantità su cui trattasi di operare, e conserva la caratteristica ordinaria per indicare il valore più semplice o quello che sembra dover esser preso in ispeciale considerazione. Nel detto caso una qualunque delle due radici potrà esprimersi così

$$((a))^{\frac{1}{2}}$$

e la sola radice positiva potrà esprimersi, come ordinariamente si pratica, in questo modo

$$a^{\frac{1}{2}}, \text{ ovvero } \sqrt{a}.$$

Il vantaggio di questa nuova caratteristica si scorge specialmente nella Trigonometria, allorchè si tratta de' varj archi che corrispondono ad una medesima linea trigonometrica; rappresentando con m una quantità positiva o negativa, le caratteristiche

$$\text{ar. sen. } ((m)), \quad \text{ar. tang. } ((m)), \quad \text{ar. sec. } ((m)),$$
$$\text{ar. cos. } ((m)), \quad \text{ar. cot. } ((m)), \quad \text{ar. cosec. } ((m)),$$

indicheranno uno qualunque degli archi di cui m esprime il seno, o la tangente, o la secante, ecc.; quindi ci potremo valere delle ordinarie caratteristiche

$$\text{ar. sen. } (m), \quad \text{ar. tang. } (m), \quad \text{ar. sec. } (m),$$
$$\text{ar. cos. } (m), \quad \text{ar. cos. } (m), \quad \text{ar. cosec. } (m),$$

oppure di quelle che si ottengono sopprimendo affatto le parentesi

$$\text{ar. sen. } m, \quad \text{ar. tang. } m, \quad \text{ar. sec. } m$$
$$\text{ar. cos. } m, \quad \text{ar. cot. } m, \quad \text{ar. cosec. } m$$

quando, fra gli archi di cui m rappresenta una linea trigonometrica, vorremo designar quello che ha il più piccolo valore numerico, ovvero, essendo questi archi uguali e di segni contrarj, quello che ha il più piccolo valore positivo. In conseguenza

$$\text{ar. sen. } m, \quad \text{ar. tang. } m, \quad \text{ar. cot. } m, \quad \text{ar. cosec. } m,$$

indicheranno degli archi positivi o negativi, ma compresi fra i limiti $-\frac{1}{2}\pi$, e $+\frac{1}{2}\pi$; mentrechè

$$\text{ar. cos. } m, \quad \text{ar. sec. } m,$$

indicheranno degli archi positivi compresi fra i limiti o e π

Sopra queste convenzioni potremo stabilire, stante le formule (x) n.° 68, le condizioni seguenti

$$+\text{ar. sen. } (-m) = -\text{ar. sen. } (m) \qquad (1)$$

$$+\text{ar. cos. } (-m) = -\text{ar. cos. } (m) + \pi \qquad (2)$$

$$+\text{ar. tang. } (-m) = -\text{ar. tang. } (m) \qquad (3)$$

$$+\text{ar. cot. } (-m) = -\text{ar. cot. } (m) \qquad (4)$$

$$+\text{ar. sec. } (-m) = -\text{ar. sec. } (m) + \pi \qquad (5)$$

$$+\text{ar. cosec. } (-m) = -\text{ar. cosec. } (m) \qquad (6)$$

Quindi dalle formule (XIX) a (XXIV) (n.° 71 e seg.) potremo dedurre le relazioni qui appresso;

$$\text{ar. sen. } ((+m)) = \pm\text{ar. sen. } (m) + \frac{1}{2}\pi \mp \frac{1}{2}\pi + 2k\pi,$$

$$\text{ar. sen. } ((-m)) = \pm\text{ar. sen. } (m) + \frac{1}{2}\pi \pm \frac{1}{2}\pi + 2k\pi,$$

$$\text{ar. cos. } ((+m)) = \pm\text{ar. cos. } (m) + 2k\pi,$$

$$\text{ar. cos. } ((-m)) = \pm\text{ar. cos. } (m) + \pi + 2m\pi,$$

$$\text{ar. tang. } ((+m)) = +\text{ar. tang. } (m) + k\pi,$$

$$\text{ar. tang. } ((-m)) = -\text{ar. tang. } (m) + k\pi,$$

$$\text{ar. cot. } ((+m)) = +\text{ar. cot. } (m) + k\pi,$$

$$\text{ar. cot. } ((-m)) = -\text{ar. cot. } (m) + k\pi,$$

$$\text{ar. sec. } ((+m)) = \pm\text{ar. sec. } (m) + 2k\pi,$$

$$\text{ar. sec. } ((-m)) = \pm\text{ar. sec. } (m) + \pi + 2k\pi,$$

$$\text{ar. cosec. } ((+m)) = \pm\text{ar. cosec. } (m) + \frac{1}{2}\pi \pm \frac{1}{2}\pi + 2k\pi,$$

$$\text{ar. cosec. } ((-m)) = \pm\text{ar. cosec. } (m) + \frac{1}{2}\pi \pm \frac{1}{2}\pi + 2k\pi.$$

Le quali ove si ponga mente alle precedenti condizioni (1) a (6), e si rappresenti con m una quantità positiva o negativa, riduconsi agevolmente alle seguenti

$$\text{ar. sen. } ((m)) = \pm \text{ar. sen. } m + \frac{1}{2}(4k + 1 \pm 1)\pi, \quad (7)$$

$$\text{ar. cos.}((m)) = \pm \text{ar. cos. } m + 2k\pi, \quad (8)$$

$$\text{ar. tang.}((m)) = \text{ar. tang. } m + k\pi, \quad (9)$$

$$\text{ar. cot.}((m)) = \text{ar. cot. } m + k\pi, \quad (10)$$

$$\text{ar. sec.}((m)) = \pm \text{ar. sec. } m + 2k\pi, \quad (11)$$

$$\text{ar. cosec.}((m)) = \pm \text{ar. cosec. } m + \frac{1}{2}(4k + 1 \pm 1)\pi. \quad (12)$$

Come al n.° 71, k indica un intero qualunque positivo o negativo.

NOTA IX.

Sopra le espressioni di sen $(a \pm b)$, *e cos* $(a \pm b)$.

Ho determinate queste espressioni al n.° 79, valendomi della ordinaria costruzione geometrica, poichè sembravami che si presentasse più naturalmente delle altre, e meglio servisse all'ordine analitico di cui mi son fatto una legge costante. Di poi al n.° 114 ho mostrato che le espressioni medesime potevano considerarsi come una immediata conseguenza della proporzionalità de' lati del triangolo coi seni degli angoli opposti. Ora indicherò brevemente tre dimostrazioni delle espressioni medesime come quelle che offrono tre diversi esempj di vera eleganza e semplicità.

Descrivasi una circonferenza (fig. 74), e suppongasi che il raggio di essa sia $= 1$. Ogni corda tirata in questa circonferenza sarà uguale al doppio del seno della metà del suo arco, o dell'angolo iscritto corrispondente all'arco medesimo.

Or dividasi questa circonferenza mediante due corde BA, CD tra loro perpendicolari, in quattro parti BC, CA,

AD, DB, che potremo respettivamente indicare con $2a$, $2b$, $\pi - 2a$, $\pi - 2b$: è manifesto che i due segmenti della BA saranno indicati da

$$2 \operatorname{sen} a \cos b, \quad 2 \operatorname{sen} b \cos a;$$

ora

$$BA = 2 \operatorname{sen}(a+b),$$

adunque

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} \cos a. \qquad (1)$$

I due segmenti della CD saranno espressi da

$$2 \cos a \cos b, \quad 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,$$

ora

$$CD = 2 \cos(a-b),$$

dunque

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b. \qquad (4)$$

Ciò posto prendasi KG = KA, e conducasi DG; è manifesto che essendo l'angolo BGD supplemento dell'angolo BAD, il triangolo BGD potrebbe iscriversi nel segmento BMD; in conseguenza BG può considerarsi come la corda dell'arco corrispondente all'angolo BDG; laonde

$$BG = 2 \operatorname{sen} BDG = 2 \operatorname{sen}(a-b);$$

d'altra parte BG è la differenza de' due segmenti della BA; dunque

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a. \qquad (2)$$

Finalmente prendasi KF = KC, e conducasi BF; il triangolo BDF potrebbe iscriversi nel segmento BMD; conseguentemente DF può considerarsi come la corda dell'arco corrispondente all'angolo DBF; per cui sarà

$$DF = 2 \operatorname{sen} DBF = \cos(a+b);$$

ma DF è la differenza de' due segmenti di CD; dunque

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b. \qquad (3)$$

2.° La dimostrazione delle stesse formule può desumersi

eziandio dal teorema di Tolomeo in virtù del quale si sà essere il prodotto della diagonali d'un quadrilatero iscritto nel circolo, uguale alla somma de' prodotti dei lati opposti.

Indicando con $2a$, $2b$, $2c$, $2\pi - 2(a+b+c)$, gli archi i quali hanno per corde i quattro lati del quadrilatero iscritto, saranno i lati medesimi respettivamente espressi da

$$2 \operatorname{sen} a,\ 2 \operatorname{sen} b,\ 2 \operatorname{sen} c,\ 2 \operatorname{sen}(a+b+c);$$

e le due diagonali da

$$2 \operatorname{sen}(a+b),\quad 2 \operatorname{sen}(b+c);$$

per cui avremo la formula

$$\operatorname{sen}(a+b) \operatorname{sen}(b+c) = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen}(a+b+c),$$

la quale avrà luogo per qualunque valore di a, b, c.

Or facendo $b+c = \frac{\pi}{2}$, risulterà

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a. \qquad (1)$$

Facendo $b = \frac{\pi}{2}$, e cambiando dipoi c in b, sarà

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b. \qquad (2)$$

Facendo $c = -a$, sarà

$$\operatorname{sen}(b+a) \operatorname{sen}(b-a) = \operatorname{sen}^2 b - \operatorname{sen}^2 a;$$

ed osservando che il secondo membro si può porre sotto la forma

$$\operatorname{sen}^2 b(\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a) - \operatorname{sen}^2 a(\operatorname{sen}^2 b + \cos^2 b),$$

avremo

$$\operatorname{sen}(b-a) = \operatorname{sen} b \cos a - \operatorname{sen} a \cos b. \qquad (3)$$

Finalmente facendo $c = \frac{\pi}{2} - a$, otterremo

$$\operatorname{sen}(a+b) \cos(a-b) = \operatorname{sen} a \cos a + \operatorname{sen} b \cos b;$$

e quindi, con una operazione analoga alla precedente,

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b. \qquad (4)$$

3.° Altra dimostrazione assai elegante di queste formule può poi aversi dal principio

$$\text{corda}^2 (a-b) = (\cos b - \cos a)^2 + (\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b)^2,$$

il quale apparirà evidente, tostochè si osserverà che la corda della differenza di due archi può sempre considerarsi come l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo i cui cateti sono la differenza de' coseni di questi archi, e la differenza dei loro seni, intendo però che questi seni e coseni si prendano coi segni che loro competono a seconda delle varie grandezze dell' arco.

Sviluppando il secondo membro avremo

$$\text{corda}^2 (a-b) = 2 - 2\cos a \cos b - 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b;$$

e ponendo $b = 0$, ne verrà

$$\text{corda}^2 a = 2 - 2\cos a,$$

e poichè a è un arco qualunque, avremo pure

$$\text{corda}^2 (a-b) = 2 - 2\cos(a-b);$$

ed uguagliando questa espressione alla precedente, otterremo

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b; \qquad (4)$$

di qui, cambiando b in $a-b$, dedurremo

$$\cos b = \cos a \cos(a-b) + \operatorname{sen} a \operatorname{sen}(a-b);$$

la quale, sostituendovi lo stesso valore di $\cos(a-b)$ datoci dalla (4), e ponendo dipoi $1 - \operatorname{sen}^2 a$ in luogo di $\cos^2 a$, dà

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a. \qquad (3)$$

Ora da queste formule (4) e (3) mediante la sostituzione di $a+b$ ad a, ricaveremo le seguenti

$$\cos a = \cos(a+b)\cos b + \operatorname{sen}(a+b)\operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen}(a+b)\cos b - \cos(a+b)\operatorname{sen} b.$$

da cui, mediante l'eliminazione, ricavansi finalmente queste

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \qquad (2)$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a. \qquad (1)$$

Le prime due dimostrazioni si debbono al Signor Carnot (*); l'altra deesi al Signor Sarrus, e si trova negli Annali di Matematica del Signor Gergonne (**).

NOTA X.

Sopra alcune relazioni trigonometriche fra i tre angoli d'un triangolo.

Le formule

$$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} B \cos C + \operatorname{sen} C \cos B,$$

$$\operatorname{sen} B = \operatorname{sen} A \cos C + \operatorname{sen} C \cos A,$$

$$\operatorname{sen} C = \operatorname{sen} A \cos B + \operatorname{sen} B \cos A;$$

indicano le relazioni che esistono fra i seni ed i coseni degli angoli d'un triangolo qualunque; ed esse si deducono dal solo principio della proporzionalità dei lati d'un triangolo coi seni degli angoli opposti (n.° 114).

Dalla nota formula poi

$$\operatorname{tang}(A+B) = \frac{\operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B}{1 - \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B}$$

riflettendo che a $\operatorname{tang}(A+B)$ si può sostituire $-\operatorname{tang} C$, abbiamo

(*) *Géom. de position*, pag. 155 e pag. 169.
(**) *Annales de Math. pures et appliquées*. T. XI. pag. 323.

$$\text{tang A} + \text{tang B} + \text{tang C} = \text{tang A tang B tang C}$$

altra singolare relazione tra le tangenti degli angoli del triangolo. Qui, riflettendo che le tangenti possono assumere qualunque valore, si vedrà che il problema nel quale si propone di *trovare tre quantità la cui somma uguagli il loro prodotto* ammette una infinità di soluzioni.

Di più dalla formula

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$$

otterremo, essendo c un angolo qualunque,

$$2\cos(a+b)\cos c + 2\cos(a-b)\cos c = 4\cos a \cos b \cos c,$$

e quindi

$$\cos(a+b+c) + \cos(b+c-a) + \cos(a+c-b) + \cos(a+b-c)$$
$$= 4\cos a \cos b \cos c;$$

la quale avrà luogo qualunque sieno a, b, c.

Adunque sostituendo ad a, b, c le metà degli angoli del triangolo, ed osservando che la somma di queste metà è uguale ad un angolo retto, avremo

$$\text{sen A} + \text{sen B} + \text{sen C} = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2};$$

elegante formula la quale esprime la relazione fra i seni degli angoli del triangolo, ed i coseni delle loro metà; essa può utilmente impiegarsi nelle trasformazioni delle formule trigonometriche.

NOTA XI.

Sopra le formule che servono immediatamente alla risoluzione de' triangoli rettilinei.

Le formule colle quali si può completamente effettuare la

risoluzione de' triangoli rettilinei si riducono alle tre seguenti

$$\frac{\text{sen A}}{a} = \frac{\text{sen B}}{b} = \frac{\text{sen C}}{c}, \qquad (1)$$

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}(\text{A} - \text{B}) = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}\text{C}, \qquad (2)$$

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}\text{A} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}; \qquad (3)$$

potendosi alla terza sostituire l'altra

$$\cos\frac{1}{2}\text{A} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}}. \qquad (4)$$

Di più queste formule servono immediatamente alla risoluzione degli annoverati casi, stantechè non hanno d'uopo di alcuna preparazione per applicarvi il calcolo logaritmico. Ecco frattanto la più semplice filiazione delle formule stesse.

Rispetto alla (2) converrà richiamare la formula

$$\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(\text{A} - \text{B})}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(\text{A} + \text{B})} = \frac{\text{sen A} - \text{sen B}}{\text{sen A} + \text{son B}}, \qquad (5)$$

e combinarla colla formula

$$\frac{\text{sen A} - \text{sen B}}{\text{sen A} + \text{sen B}} = \frac{a-b}{a+b},$$

la quale si ricava dalla (1); non trascurando di osservare che nella (5) si può sostituire $\cot\frac{1}{2}\text{C}$, a $\text{tang}\,\frac{1}{2}(\text{A} + \text{B})$.

Rispetto alla (3) potremo ricorrere alla equazione

$$\text{sen A} + \text{sen B} + \text{sen C} = 4\cos\frac{\text{A}}{2}\cos\frac{\text{B}}{2}\cos\frac{\text{C}}{2}, \qquad (6)$$

di che abbiamo tenuto proposito nella nota precedente.

Questa equazione, che sussiste ogniqualvolta

$$A + B + C = \pi,$$

dovrà pure verificarsi quando si sostituiscano a due degli angoli A, B, C i loro supplementi, e contemporaneamente si cambi il segno al terzo: adunque

$$\text{sen}\, A + \text{sen}\, B - \text{sen}\, C = 4\, \text{sen}\, \frac{A}{2}\, \text{sen}\, \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2},$$

$$\text{sen}\, A + \text{sen}\, C - \text{sen}\, B = 4\, \text{sen}\, \frac{A}{2}\, \text{sen}\, \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2},$$

$$\text{sen}\, B + \text{sen}\, C - \text{sen}\, A = 4\, \text{sen}\, \frac{B}{2}\, \text{sen}\, \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}.$$

Or moltiplicando membro a membro la prima colla seconda, e la terza colla (6) avremo

$$\text{sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{(\text{sen}\, A + \text{sen}\, B - \text{sen}\, C)(\text{sen}\, A - \text{sen}\, B + \text{sen}\, C)}{4\, \text{sen}\, B\, \text{sen}\, C};$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{(\text{sen}\, A + \text{sen}\, B + \text{sen}\, C)(\text{sen}\, B + \text{sen}\, C - \text{sen}\, A)}{4\, \text{sen}\, B\, \text{sen}\, C}.$$

E sostituendo in queste i valori dei quattro fattori trinomj, che facilmente si traggono dalla (1), avremo le formule (3) e (4). Ho estratto questo elegantissimo calcolo dal Corso d'Analisi del Signor Cauchy (p. 436).

NOTA XII.

Sopra alcune relazioni fra le rette trigonometriche d'un arco, e quelle della sua metà.

Dalle formule che si trovano esposte ne' Cap. VI, VII, X, XI, ne derivano moltissime altre che riescono pregevoli sotto varj rapporti. Io mi limiterò ad indicare le

formule che possono più facilmente occorrere nelle varie applicazioni della Trigonometria, incominciando da quelle che esprimono altre relazioni fra le rette trigonometriche d'un arco, e le rette trigonometriche della sua metà.

Primieramente farò osservare che dalle formule (1) n.° 64, e (XXVIII) n.° 80, risulta questa singolare espressione

$$\cos^4 a - \operatorname{sen}^4 a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = \cos 2a, \quad (1)$$

la quale è stata indicata dal Carnot (*).

Le formule (n.° 105)

$$\operatorname{tang} a = \frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} a}{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a}, \quad (2)$$

e (n.° 214)

$$\operatorname{sen} a = \frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} a}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a}, \quad (3)$$

danno

$$\cos a = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a}; \quad (4)$$

dalla quale facilmente abbiamo

$$\cos a = \frac{\cot \frac{1}{2} a - \operatorname{tang} \frac{1}{2} a}{\cot \frac{1}{2} a + \operatorname{tang} \frac{1}{2} a}. \quad (5)$$

Dalle (XLII) e (XLIII) n.° 104 deriva immediatamente

$$\operatorname{tang} a = \frac{2}{\cot \frac{1}{2} a - \operatorname{tang} \frac{1}{2} a}, \quad (6)$$

(*) Op. cit. p. 155.

$$2 \cot a = \cot \frac{1}{2} a - \operatorname{tang} \frac{1}{2} a. \qquad (7)$$

Moltiplicando membro a membro la (5) e la (6) si ha

$$\operatorname{sen} a = \frac{2}{\cot \frac{1}{2} a + \operatorname{tang} \frac{1}{2} a}. \qquad (8)$$

Or le due ultime daranno

$$\operatorname{sen} a = \frac{1}{\cot \frac{1}{2} a - \cot a}; \qquad (9)$$

e questa unitamente alla (7) darà pure

$$\operatorname{sen} a = \frac{1}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a + \cot a}. \qquad (10)$$

Dalla (XLVI) n.° 106, osservando che $\operatorname{sen} a = \cos a \operatorname{tang} a$, avremo

$$\cos a = \frac{1}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} a \operatorname{tang} a}. \qquad (11)$$

Facendo nelle formule (LVII) e (LVIII) n.° 108, $a = 90^0$, e cambiando b in a, trovasi

$$1 + \operatorname{sen} a = 2 \operatorname{sen}^2 (45^0 + \frac{1}{2} a), \qquad (12)$$

$$1 - \operatorname{sen} a = 2 \operatorname{sen}^2 (45^0 - \frac{1}{2} a); \qquad (13)$$

facendo poi nella (LIX) e (LX), $b = 0$, risulterà

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{1}{2} a,$$

$$1 - \cos a = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a,$$

le quali sono identiche alle (XXV) e (XXVI) n.° 83, in altro modo ottenute.

Quindi avremo le seguenti

$$\frac{1+\operatorname{sen} a}{1-\operatorname{sen} a}=\operatorname{tang}^2\left(45^\circ+\frac{1}{2}a\right), \qquad (14)$$

$$\frac{1-\operatorname{sen} a}{1+\operatorname{sen} a}=\operatorname{tang}^2\left(45^\circ-\frac{1}{2}a\right), \qquad (15)$$

$$\frac{1+\cos a}{1-\cos a}=\cot^2\frac{1}{2}a, \qquad (16)$$

$$\frac{1-\cos a}{1+\cos a}=\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}a,$$

$$\frac{1+\operatorname{sen} a}{1+\cos a}=\frac{\operatorname{sen}^2\left(45^\circ+\frac{1}{2}a\right)}{\cos^2\frac{1}{2}a}, \qquad (17)$$

$$\frac{1-\operatorname{sen} a}{1-\cos a}=\frac{\operatorname{sen}^2\left(45^\circ-\frac{1}{2}a\right)}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a}; \qquad (18)$$

la quarta è identica alla (XLVIII) n.° 106.

Facendo nelle formule (I) e (LI) $a=60$, e quindi cambiando b in a, poichè $\cos 60^\circ=\operatorname{sen} 30^\circ=\frac{1}{2}$ (n.° 87), verrà

$$\operatorname{sen} a=\operatorname{sen}(60^\circ+a)-\operatorname{sen}(60^\circ-a), \qquad (19)$$

$$\cos a=\cos(60^\circ+a)+\cos(60^\circ-a). \qquad (20)$$

Facendo nella (XXV) e (XXVI) n.° 79, $b=45^\circ$, poichè $\operatorname{sen} 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, n.° 87, otterremo

$$\operatorname{sen}(45^\circ+a)=\frac{\cos a+\operatorname{sen} a}{\sqrt{2}}, \qquad (21)$$

$$\cos(45^\circ+a)=\frac{\cos a-\operatorname{sen} a}{\sqrt{2}}; \qquad (22)$$

e conseguentemente

$$\operatorname{tang}(45^\circ+a)=\frac{1+\operatorname{tang} a}{1-\operatorname{tang} a}, \qquad (23)$$

$$\tang(45^\circ - a) = \frac{1 - \tang a}{1 + \tang a}; \qquad (24)$$

le quali si potrebbero ben anche ricavare dalla (XXXVII) e (XXXVIII) n.° 108 facendo $a = 45^\circ$, e cambiando dipoi b in a.

Le (14) e (15) risolute rispetto a $\sen a$ daranno

$$\sen a = \frac{\tang^2(45^\circ + \frac{1}{2}a) - 1}{\tang^2(45^\circ + \frac{1}{2}a) + 1}, \qquad (25)$$

$$\sen a = \frac{1 - \tang^2(45^\circ - \frac{1}{2}a)}{1 + \tang^2(45^\circ - \frac{1}{2}a)}; \qquad (26)$$

e moltiplicando la (25) per $\cot(45^\circ + \frac{1}{2}a)$, avremo

$$\sen a = \frac{\tang(45^\circ + \frac{1}{2}a) - \cot(45^\circ + \frac{1}{2}a)}{\tang(45^\circ + \frac{1}{2}a) + \cot(45^\circ + \frac{1}{2}a)}, \qquad (27)$$

ovvero

$$\sen a = \frac{\tang(45^\circ + \frac{1}{2}a) - \tang(45^\circ - \frac{1}{2}a)}{\tang(45^\circ + \frac{1}{2}a) + \tang(45^\circ - \frac{1}{2}a)}; \qquad (28)$$

or sottraendo dalla (23) la (24), sostituendo quindi $\frac{1}{2}a$ ad a; e profittando eziandio dalla formula (2), otterremo

$$2\tang a = \tang(45^\circ + \frac{1}{2}a) - \tang(45^\circ - \frac{1}{2}a), \qquad (29)$$

per cui la (28) somministrerà finalmente questa

$$\cos a = \frac{2}{\tang(45^\circ + \frac{1}{2}a) + \tang(45^\circ - \frac{1}{2}a)}; \qquad (30)$$

tutte queste formule son note; e molte di esse sono state

ricordate dall' illustre Cagnoli nel Cap. IV della sua Trigonometria (*).

NOTA XIII.

Sopra alcune relazioni fra le rette trigonometriche di due archi, e quelle della loro somma, e differenza.

Dalle formule (XXV) (XXVI) (XXXIII) (XXXIV) derivano anche le seguenti

$$\operatorname{sen}(a+b)\cos(a-b) = \operatorname{sen} a \cos a + \operatorname{sen} b \cos b\,, \qquad (1)$$

$$\cos(a+b)\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos a - \operatorname{sen} b \cos b\,, \qquad (2)$$

$$\cos(a+b)\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos a \cos 2b + \operatorname{sen} b \cos b \cos 2a, \qquad (3)$$

$$\cos(a-b)\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos a \cos 2b - \operatorname{sen} b \cos b \cos 2a; \qquad (4)$$

$$\frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} b} = \frac{\cot b + \cot a}{\cot b - \cot a} = \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\operatorname{sen}(a-b)}, \qquad (5)$$

$$\frac{\cot b - \operatorname{tang} a}{\cot b + \operatorname{tang} a} = \frac{\cot a - \operatorname{tang} b}{\cot a + \operatorname{tang} b} = \frac{\cos(a+b)}{\cos(a-b)}; \qquad (6)$$

$$\operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b + \cos^2 a \cos^2 b + \operatorname{sen}^2 a \cos^2 b$$
$$+ \operatorname{sen}^2 b \cos^2 a = 0\,, \qquad (7)$$

Alla prima di cui ha fatto uso il Carnot, come si vede alla Nota IX, ho unite le (2) (3) (4) le quali sono della medesima indole; queste quattro si debbono unire alle formule n.° 109. Le (5), (6) che sono state indicate anche dal Cagnoli (**) possono unirsi a quelle del n.° 110. La (7) è stata pure ricordata dal Carnot (***). Eulero poi (****)

(*) *Cagnoli. Trig.* ed. 2. Bologna. 1805.
(**) Op. cit. p. 21.
(***) Op. cit. p. 155.
(****) *Introductio in analysin infinitorum.* Lugduni 1797. p. 97.

nota eziandio le seguenti che discendono immediatamente da quelle del n.° 110, a cui debbonsi unire;

$$\frac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b}{\cos a + \cos b} = \frac{\cos b - \cos a}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b}, \qquad (8)$$

$$\frac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b} \times \frac{\cos a + \cos b}{\cos a + \cos b} = \cot^2 \frac{1}{2}(a + b), \qquad (9)$$

$$\frac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b} \times \frac{\cos b - \cos a}{\cos a + \cos b} = \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}(a + b). \qquad (10)$$

NOTA XIV.

Sopra le relazioni de' seni e coseni d'un numero qualunque di archi, ed i seni e coseni delle loro somme, e delle loro differenze.

Rappresentiamo con $a, b, c, \ldots p$, un numero qualunque di archi; sarà

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a,$$

$$\operatorname{sen}(b-c) = \operatorname{sen} b \cos c - \operatorname{sen} c \cos b,$$

$$\operatorname{sen}(c-d) = \operatorname{sen} c \cos d - \operatorname{sen} d \cos c,$$

$$\ldots\ldots$$

$$\operatorname{sen}(p-a) = \operatorname{sen} p \cos a - \operatorname{sen} a \cos p;$$

dividendo la prima equazione per $\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$, il secondo membro di essa si ridurrà a

$$\cot b - \cot a;$$

dividendo la seconda equazione per $\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c$, il suo secondo membro si ridurrà a

$$\cot c - \cot c;$$

dividendo la terza per sen c sen d, il secondo membro si ridurrà a

$$\cot d - \cot b;$$

laonde se dopo aver fatta questa operazione sopra ogni equazione, faremo la somma dei risultati, otterremo

$$\frac{\text{sen}(a-b)}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b}+\frac{\text{sen}(b-c)}{\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c}+\frac{\text{sen}(c-d)}{\text{sen}\,c\,\text{sen}\,d}\ldots+\frac{\text{sen}(p-a)}{\text{sen}\,p\,\text{sen}\,a}=0 \quad (1)$$

se poi le equazioni medesime si divideranno pel prodotto dei coseni, anzichè per quello dei seni, avremo

$$\frac{\text{sen}(a-b)}{\cos a\cos b}+\frac{\text{sen}(b-c)}{\cos b\cos c}+\frac{\text{sen}(c-d)}{\cos c\cos d}\ldots+\frac{\text{sen}(p-a)}{\text{sen}\,p\,\text{sen}\,a}=0 \quad (2)$$

la quale potrebbe anche dedursi dalla (1) sostituendo ad a, b, ... i loro complementi.

Queste formule potranno estendersi anche al caso in cui uno o più archi sieno negativi, perlochè si potranno introdurre nelle medesime le somme di questi archi presi due a due, eliminando le loro differenze. Inoltre esse si potranno variare, e porre sotto aspetti differentissimi; poichè dovendo esse sussistere per qualunque valore di a, b, c, ec., potremo a questi archi sostituire le somme

$$(a+b),\ (b+c),\ (c+d)\ \ldots$$

o le differenze $(a-b),\ (b+c),\ (c-d)\ \ldots$

ovvero $(a+b+c),\ (b+c+d)\ \ldots$

o piuttosto $(a+b-c),\ (b+c-d)\ \ldots$

a seconda delle varie occorrenze.

Limitando poi le formule stesse ai casi in cui sono dati i tre archi a, b, c, o i quattro a, b, c, d, troveremo le formule seguenti

$$\text{sen}\, a\, \text{sen}(b-c)+\text{sen}\, b\, \text{sen}(c-a)+\text{sen}\, c\, \text{sen}(a-b)=0 \quad (3)$$

$$\cos a\, \text{sen}(b-c)+\cos b\, \text{sen}(c-a)+\cos c\, \text{sen}(a-b)=0 \quad (4)$$

$$\text{sen}\, a\, \text{sen}\, b\, \text{son}\,(c-d)+\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c\, \text{sen}\,(d-a)$$
$$+\text{sen}\, c\, \text{sen}\, d\, \text{sen}\,(a-b)+\text{sen}\, d\, \text{sen}\, a\, \text{sen}\,(b-c)=0 \quad (5)$$

$$\cos a\, \cos b\, \text{sen}\,(c-d)+\cos b\, \cos c\, \text{sen}\,(d-a)$$
$$+\cos c\, \cos d\, \text{sen}\,(a-b)+\cos d\, \cos a\, \text{sen}\,(b-c)=0 \quad (6)$$

Ma tornando al caso in cui gli archi sono in numero qualunque, faremo osservare che essendo (n.° 169, LXV)

$$\text{sen}\,(a+b)\,\text{sen}\,(a-b)=\text{sen}^2 a-\text{sen}^2 b,$$
$$\text{sen}\,(b+c)\,\text{sen}\,(b-c)=\text{sen}^2 b-\text{sen}^2 c,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\text{sen}\,(p+a)\,\text{sen}\,(p-a)=\text{sen}^2 p-\text{sen}^2 a,$$

si ha dall' addizione di tutte,

$$\text{sen}\,(a+b)\,\text{sen}\,(a-b)+\text{sen}\,(b+c)\,\text{sen}\,(b-c)$$
$$\ldots+\text{sen}\,(p+a)\,\text{sen}\,(p-a)=0. \quad (7)$$

Parimente essendo (Nota XIII. 2.ª)

$$\cos(a+b)\,\text{sen}\,(a-b)=\text{sen}\, a\cos a-\text{sen}\, b\cos b,$$
$$\cos(b+c)\,\text{sen}\,(b-c)=\text{sen}\, b\cos b-\text{sen}\, c\cos c,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cos(p+a)\,\text{sen}\,(p-a)=\text{sen}\, p\cos p-\text{sen}\, a\cos a,$$

avremo pure

$$\cos(a+b)\,\text{sen}\,(a-b)+\cos(b+c)\,\text{sen}\,(b-c)$$
$$\ldots+\cos(p+a)\,\text{sen}\,(p-a)=0. \quad (8)$$

Aggiungiamo che dalle formule (LXVII) n.° 109, e (XXXVIII) n.° 101, agevolmente si deducono le due seguenti

$$\frac{\text{sen}(a+b)\,\text{sen}(a-b)}{\cos^2 a\cos^2 b}+\frac{\text{sen}(b+c)\,\text{sen}(b-c)}{\cos^2 b\cos^2 c}$$

$$\ldots\ldots+\frac{\text{sen}(p+a)\,\text{sen}(p-a)}{\cos^2 p\cos^2 a}=0 \qquad (9)$$

$$\text{tang}(a-b)(1+\text{tang}\,a\,\text{tang}\,b)+\text{tang}(b-c)(1+\text{tang}\,b\,\text{tang}\,c)$$

$$\ldots\ldots+\text{tang}(p-a)(1+\text{tang}\,p\,\text{tang}\,a)=0 \qquad (10)$$

Se gli archi a, b, c ec. formeranno una progressione regolare soggetta ad una data legge, le formule precedenti si cambieranno in altrettante serie regolari, di cui si conoscerà la somma, stantechè essa dovrà essere 0.

Suppongasi che a, b, c, ec., formino una progressione aritmetica crescente, di cui a sia il primo termine e la ragione, ed m sia il numero dei termini; dalle formule (7) e (8) otterremo

$$\text{sen}\,3a+\text{sen}\,5a+\text{sen}\,7a\ldots+\text{sen}(2m-1)a$$

$$=\frac{\text{sen}(m+1)a.\,\text{sen}(m-1)a}{\text{sen}\,a} \qquad (11)$$

$$\cos 3a+\cos 5a+\cos 7a\ldots+\cos(2m-1)a$$

$$=\frac{\cos(m+1)a.\,\text{sen}(m-1)a}{\text{sen}\,a} \qquad (12)$$

E dalle formule (1) e (2) otterremo pure

$$\frac{1}{\text{sen}\,a.\,\text{sen}\,2a}+\frac{1}{\text{sen}\,2a.\,\text{sen}\,3a}+\text{ec.}=\frac{\text{sen}(m-1)a}{\text{sen}^2 a.\,\text{sen}\,ma} \qquad (13)$$

$$\frac{1}{\cos a.\cos 2a}+\frac{1}{\cos 2a.\cos 3a}+\text{ec.}=\frac{\text{sen}(m-1)a}{\text{sen}\,a.\cos a.\cos ma} \qquad (14)$$

ovvero

$$\text{cosec}\,a.\,\text{cosec}\,2a+\text{cosec}\,2a.\,\text{cosec}\,3a+\ldots$$

$$=\text{sen}(m-1)a.\,\text{cosec}^2 a.\,\text{cosec}\,ma; \qquad (15)$$

$$\sec a . \sec 2a + \sec 2a . \sec 3a + \ldots$$

$$= \operatorname{sen}(m-1)a . \sec a . \operatorname{cosec} a . \sec ma \qquad (16)$$

Queste formule tranne la (11) e la (12), sono dovute al Carnot (*).

NOTA XV.

Sopra la conversione in parti del raggio d' un arco espresso in gradi.

Essendo

$$\pi = 3,14159265$$

la lunghezza della mezza circonferenza il cui raggio è $= 1$, segue che π è pure la lunghezza dei $180°$, o dei $10800'$, o dei $648000''$ contenuti nella mezza circonferenza medesima: laonde indicando con $(a°)$ il numero intero o fratto di gradi contenuti in un arco, oppure con (a') il numero de' suoi minuti, o con (a'') il numero de' suoi secondi, e nel supposto che a sia la lunghezza dell'arco stesso espressa in parti del raggio $= 1$, avremo

$$180° : \pi :: (a°) : a,$$

$$10800' : \pi :: (a') : a,$$

$$648000'' : \pi :: (a'') : a;$$

e poichè

$$\frac{180°}{\pi} = 57°,29578,$$

$$\frac{10800'}{\pi} = 3437',746,$$

$$\frac{648000''}{\pi} = 206264'',8;$$

(*) *Géom. de position* p. 170. *Cours de Math. par Bossut.* Paris 1800 T. II p 401 *Lettre de Carnot à Bossut.*

otterremo le seguenti relazioni,

$$(a^\circ) = 57^\circ, 29578 \times a,$$
$$(a') = 3437', 746 \times a,$$
$$(a'') = 206264'', \times a;$$

per mezzo delle quali si potrà ottenere la lunghezza a d'un arco, tostochè ne sarà data la graduazione, e viceversa.

Facendo $a = 1$, otterremo il numero (R°) dei gradi, oppure gli (R') minuti, o gli (R'') secondi contenuti nell' arco la cui lunghezza è uguale al raggio; e sarà

$$(R^\circ) = 57^\circ, 29578$$
$$(R') = 3437', 746$$
$$(R'') = 206264'', 8:$$

perlochè potremo stabilire le seguenti relazioni

$$(a^\circ) = (R^\circ)\, a, (a') = (R')\, a, (a'') = (R'')\, a.$$

le quali applicate al caso dell'arco $= 1^\circ, = 1', = 1''$, danno

$$(R^\circ) = \frac{1}{\text{ar. } 1^\circ}, \ (R') = \frac{1}{\text{ar. } 1'}, \ (R'') = \frac{1}{\text{ar. } 1''};$$

e poichè gli archi di $1'$, ed $1''$ sono piccolissimi, è manifesto che essi non differiranno sensibilmente dai loro seni, (n.° 91) per cui sarà

$$(R') = \frac{1}{\text{sen } 1'}, \ (R'') = \frac{1}{\text{sen } 1''}.$$

È da osservarsi che π si può più esattamente esprimere con un maggior numero di cifre decimali, essendo

$$\pi = 3, 14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433$$
$$\log \pi = 0, 49714\ 98726\ 94133\ 85435\ 342;$$

inoltre noteremo che

$$\log(R^{\circ}) = 1,75812264,$$
$$\log(R') = 3,53627389,$$
$$\log(R'') = 5,31442514;$$

questi dati possono riuscire vantaggiosi ai calcoli.

Talvolta si può ricercare un arco essendo data la sua corda, e viceversa; a tal oggetto ci potremo servire della formula

$$C = 2R \operatorname{sen} \frac{A}{2}$$

la quale agevolmente si determina osservando che A indica un arco qualunque, C la sua corda, ed R il raggio con cui si suppone descritto (*).

NOTA XVI.

Sopra la conversione dei gradi sessagesimali in gradi decimali, e reciprocamente.

Sia n il valore del grado decimale, ed n' quello del grado sessagesimale della stessa circonferenza, avremo

$$400\,n = 360\,n',$$

ovvero $$10\,n = 9\,n';$$

e quindi $$n = n' - \frac{n'}{10}$$

ed $$n' = n + \frac{n}{9}.$$

Ond'è che un numero di gradi decimali si converte in numero di gradi sessagesimali, togliendovi la sua decima par-

(*) V. *Francoeur. Cours de Math.* T. I.

te. Un numero poi di gradi sessagesimali si converte in numero di gradi decimali, aggiungendovi la sua nona parte.

Debbasi in primo luogo convertire in gradi sessagesimali il numero . . . . . $56^g,9824$

Sottraendo la decima parte . . . . $5,69824$

il resto sarà . . . . . $51^\circ,28416$

or moltiplicando la frazione per 60 avremo $51^\circ 17',0496$

e di nuovo moltiplicando la frazione per 60 $51^\circ 17' 2'',976$

Debbasi in secondo luogo convertire in gradi decimali il numero . . . . . $51^\circ 17' 2'',976$

dividendo i secondi per 60, avremo . . $51^\circ 17',0496$

dividendo i minuti per 60 . . . . . $51^\circ,28416$

ora aggiungendo la nona parte . . . . $5,69824$

la somma sarà . . . . . $56^g,9824$

Si giunge allo stesso risultato, moltiplicando la nona parte per 10; ma l'addizione serve eziandio di prova.

INDICE

INTRODUZIONE

PRINCIPJ FONDAMENTALI DELL' APPLICAZIONE DELL' ALGEBRA ALLA GEOMETRIA.

CAPITOLO I.	*Dei problemi geometrici e della omogeneità* . . . . . Pag.	1
CAPITOLO II.	*Teoria delle figure correlative* . .	26
CAPITOLO III.	*Dell' ufficio dei segni*	44

PARTE PRIMA

ELEMENTI DELLA TRIGONOMETRIA RETTILINEA.

CAPITOLO I.	*Concetto fondamentale. Origine dei seni*	65
CAPITOLO II.	*Principj relativi ai triangoli rettangoli. Origine delle tangenti* . .	77
CAPITOLO III.	*Dei rapporti esistenti tra le linee trigonometriche d' un arco* . . .	80
CAPITOLO IV.	*Dei valori correlativi della quantità trigonometriche nelle diverse grandezze dell' arco*	85
CAPITOLO V.	*Dei varj archi che corrispondono ad una data retta trigonometrica.* .	93
CAPITOLO VI.	*Della moltiplicazione degli archi.* .	98
CAPITOLO VII.	*Della divisione degli archi.*	104
CAPITOLO VIII.	*Calcolo della tavola dei seni* . . .	111
CAPITOLO IX.	*Del modo di verificare la tavola dei seni*	118

CAPITOLO X. *Formule relative alle tangenti.* . . 121
CAPITOLO XI. *Altre relazioni esistenti tra le rette trigonometriche di due archi qualunque, e quella della somma, e della differenza degli archi stessi.* 125
CAPITOLO XII. *Dimostrazione geometrica di alcune formule* 129
CAPITOLO XIII. *Osservazioni sul principio generale della Trigonometria rettilinea.* . 137
CAPITOLO XIV. *Risoluzione generale dei triangoli rettilinei rettangoli* 144
CAPITOLO XV. *Osservazioni sopra i varj casi della risoluzione dei triangoli rettilinei rettangoli* 148
CAPITOLO XVI. *Risoluzione dei triangoli rettilinei obliquangoli* ivi
CAPITOLO XVII. *Osservazioni sopra i varj casi della risoluzione dei triangoli obliquangoli* 160

PARTE SECONDA

APPLICAZIONE DELLA TRIGONOMETRIA RETTILINEA ALLA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI, ED ALLA DIMOSTRAZIONE DEI TEOREMI DI GEOMETRIA PIANA.

PROBLEMA I. *Determinare la superficie d' un triangolo, essendo dati tre de' suoi elementi.* 165
PROBLEMA II. *Determinare il raggio del circolo circoscritto ad un triangolo* . . . 167
PROBLEMA III. *Determinare il raggio del circolo iscritto in un triangolo* 169
PROBLEMA IV. *Trovare l'area d' un parallelogrammo di cui si conoscono due lati adiacenti, e l'angolo che comprendono.* 172

PROBLEMA V. *Determinare l' area d' un quadrilatero qualunque di cui si conoscono le due diagonali, e l' angolo che esse formano* 172

PROBLEMA VI. *Misurare l' area d' un poligono regolare di cui si conosce il numero dei lati, e la lunghezza d' uno di essi* 173

PROBLEMA VII. *Determinare l' area d' un settore di cui si conosce l' arco, ed il raggio. Quindi quella d' un segmento per mezzo degli stessi dati* ivi

PROBLEMA VIII. *Trovare due angoli di cui si conosce il rapporto dei seni, e quello delle tangenti* 174

TEOREMA I. *In un quadrilatero qualunque la somma de' quadrati dei lati è uguale alla somma de' quadrati delle diagonali, più il quadruplo del quadrato della retta che unisce i punti di mezzo delle diagonali medesime* 175

TEOREMA II. *In qualunque poligono un lato è uguale alla somma di tutti gli altri respettivamente moltiplicati pei coseni degli angoli che essi formano col primo* 176

TEOREMA III. *In ogni poligono la somma dei lati moltiplicati respettivamente pei coseni degli angoli che essi formano con una retta condotta a piacere sul piano di questo poligono è uguale a zero* 178

TEOREMA IV. *In ogni poligono il quadrato d' un lato qualunque è uguale alla som-*

ma de' quadrati di tutti gli altri lati meno due volte i prodotti di questi presi due a due nel coseno del l' angolo che comprendono . . . 178

PROBLEMA IX. *Determinare la superficie d' un poligono di cui si conoscono i lati, e gli angoli* 181

PROBLEMA X. *Determinare la superficie d' un poligono di cui si conosce un lato, e gli angoli che formano con lo stesso lato le varie rette condotte dalle sue estremità a tutti i vertici del poligono* 183

PROBLEMA XI. *Essendo dati d' un quadrilatero tre lati, uno degli angoli fra essi compresi, ed uno degli angoli adiacenti, trovare il quarto lato, e gli altri due angoli* 184

PROBLEMA XII. *Essendo dati d' un quadrilatero tre lati, e gli angoli fra essi compresi, trovare gli altri due angoli, ed il quarto lato* 185

PROBLEMA XIII. *Essendo dati d' un pentagono quattro lati, e gli angoli che essi comprendono, trovare gli altri due angoli ed il quarto lato* 186

TEOREMA V. *In ogni quadrilatero iscritto nel circolo il prodotto delle due diagonali è uguale alla somma dei prodotti dei lati opposti, ed il rapporto delle diagonali medesime è uguale al rapporto delle somme dei rettangoli dei lati adiacenti alle loro estremità* 187

PROBLEMA XIV. *Essendo dati i quattro lati d' un qua-*

drilatero iscritto, trovare le diagonali, il raggio del circolo, la superficie del quadrilatero ed i suoi angoli 188

PARTE TERZA

ELEMENTI DELLA TRIGONOMETRIA SFERICA.

CAPITOLO I. *Principali proprietà dei triangoli sferici.* 191
CAPITOLO II. *Principio generale per la risoluzione dei triangoli sferici* 194
CAPITOLO III. *Dei triangoli sferici rettangoli* . . 204
CAPITOLO IV. *Osservazioni preliminari intorno alla risoluzione generale dei triangoli sferici* 209
CAPITOLO V. *Risoluzione generale dei triangoli sferici rettangoli* 210
CAPITOLO VI. *Osservazioni sopra i varj casi della risoluzione dei triangoli sferici rettangoli.* 214
CAPITOLO VII. *Risoluzione generale dei triangoli sferici obliquangoli* 215
CAPITOLO VIII. *Osservazioni sopra i varj casi della risoluzione dei triangoli sferici obliquangoli* 227

PARTE QUARTA

APPLICAZIONE DEI PRINCIPJ DELLA TRIGONOMETRIA SFERICA ALLA GEOMETRIA SFERICA, ED AI POLIEDRI.

PROBLEMA I. *Dati i lati d' un triangolo sferico, determinare il raggio del circolo circoscritto* 239

PROBLEMA II. *Dati i lati d' un triangolo sferico, determinare la superficie del triangolo rettilineo formato dalle corde dei medesimi lati* 241

PROBLEMA III. *Determinare la superficie del triangolo sferico, essendo noti i suoi tre angoli* 242

PROBLEMA IV. *Determinare l' area del triangolo sferico, essendone dati due lati e l' angolo compreso* 243

PROBLEMA V. *Determinare l' area del triangolo sferico, conoscendo i suoi tre lati* . 245

PROBLEMA VI. *Trovare la superficie del quadrilatero sferico di cui due lati sono perpendicolari alla base, essendo data la base, ed i lati medesimi* . . 248

PROBLEMA VII. *Determinare la posizione del polo di un circolo circoscritto ad un triangolo sferico di cui sono dati i lati* . 250

PROBLEMA VIII. *Trovare la solidità d' una piramide triangolare essendone date tre costole concorrenti ad un medesimo vertice, ed i tre angoli che esse fanno tra loro* 251

PROBLEMA IX. *Trovare la solidità d' una piramide triangolare essendone date le sei costole* 252

PROBLEMA X. *Trovare il raggio della sfera iscritta, e quello della sfera circoscritta ad una piramide data* ivi

PROBLEMA XI. *Determinare la solidità d' un parallelepipedo, essendone date tre costole e gli angoli che esse formano tra loro* 256

PROBLEMA XII. *Determinare la diagonale d' un pa-*

rallepipedo che unisce due vertici opposti, conoscendo le sue costole e gli angoli che esse formano tra loro 256

APPENDICE

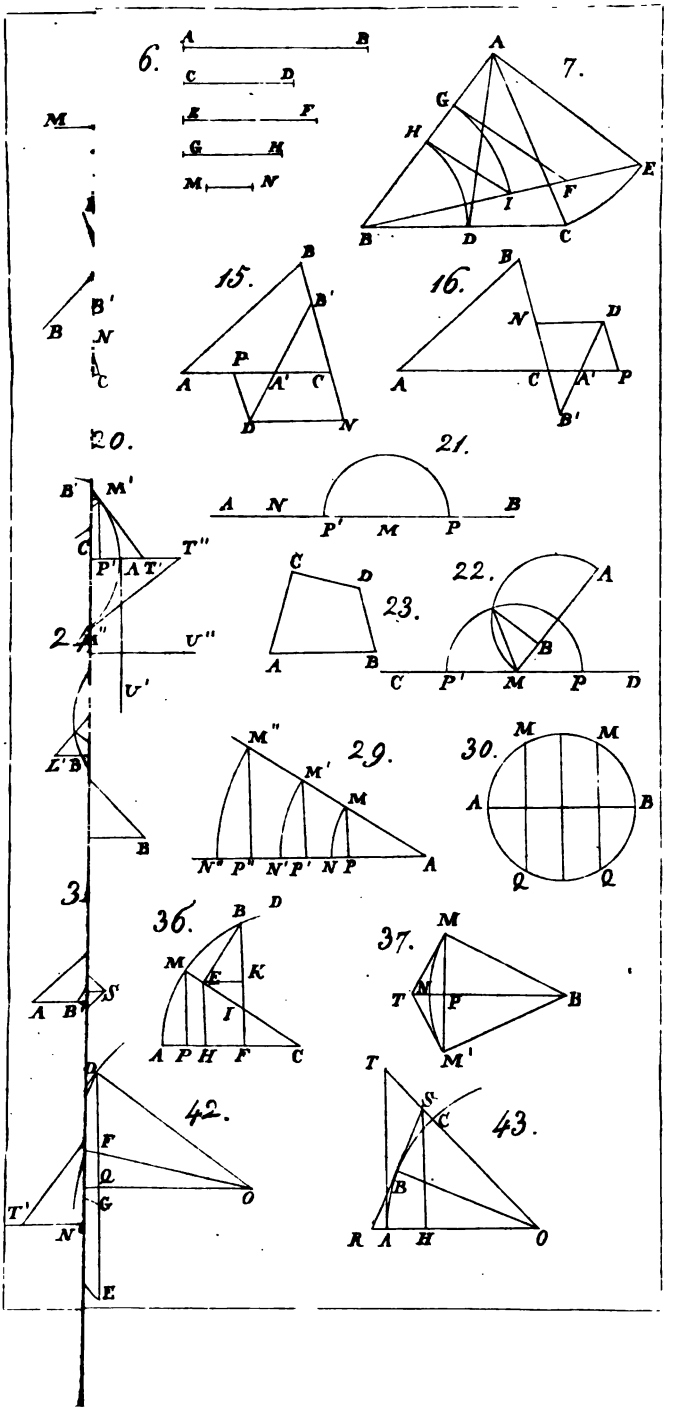
TEORICA ANALITICA DEI LOGARITMI

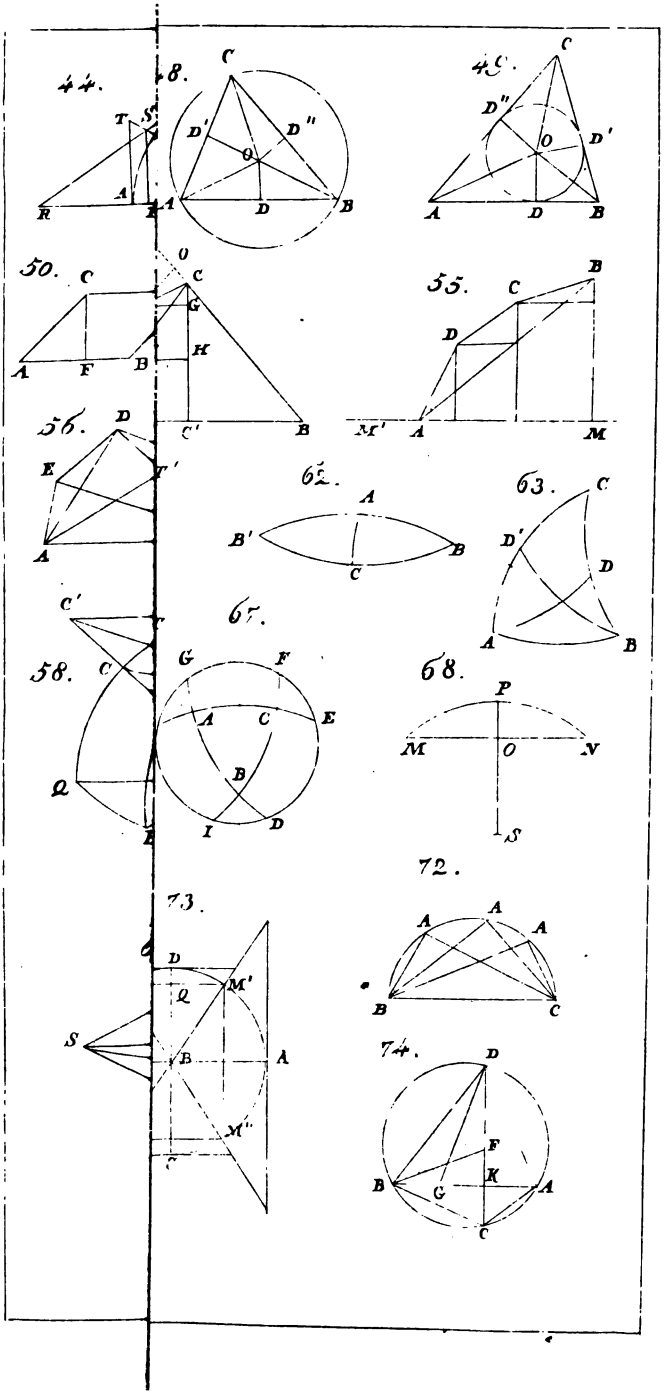
§. I. *Nozione d' un sistema di logaritmi* 259
§. II. *Proprietà generali dei logaritmi* 262
§. III. *Ipotesi di* log 1 = 0. 266
§. IV. *Ipotesi di* log a = 1 267
§. V. *Ipotesi di* a = 10 270
§. VI. *Costruzione delle tavole logaritmiche* . . . 271
§. VII. *Uso delle tavole logaritmiche* 276
§. VIII. *Logaritmi dei numeri che eccedono il limite delle tavole. Numeri dei logaritmi che non si trovano esattamente fra quelli delle tavole.* 278
§ IX. *Dei logaritmi delle frazioni* 283
§. X. *Dell' uso dei complementi aritmetici* . . . 287
§. XI. *Dell'uso delle tavole trigonometriche sessagesimali* 290
§. XII. *Notizie storiche intorno alle più celebri tavole logaritmiche* 296

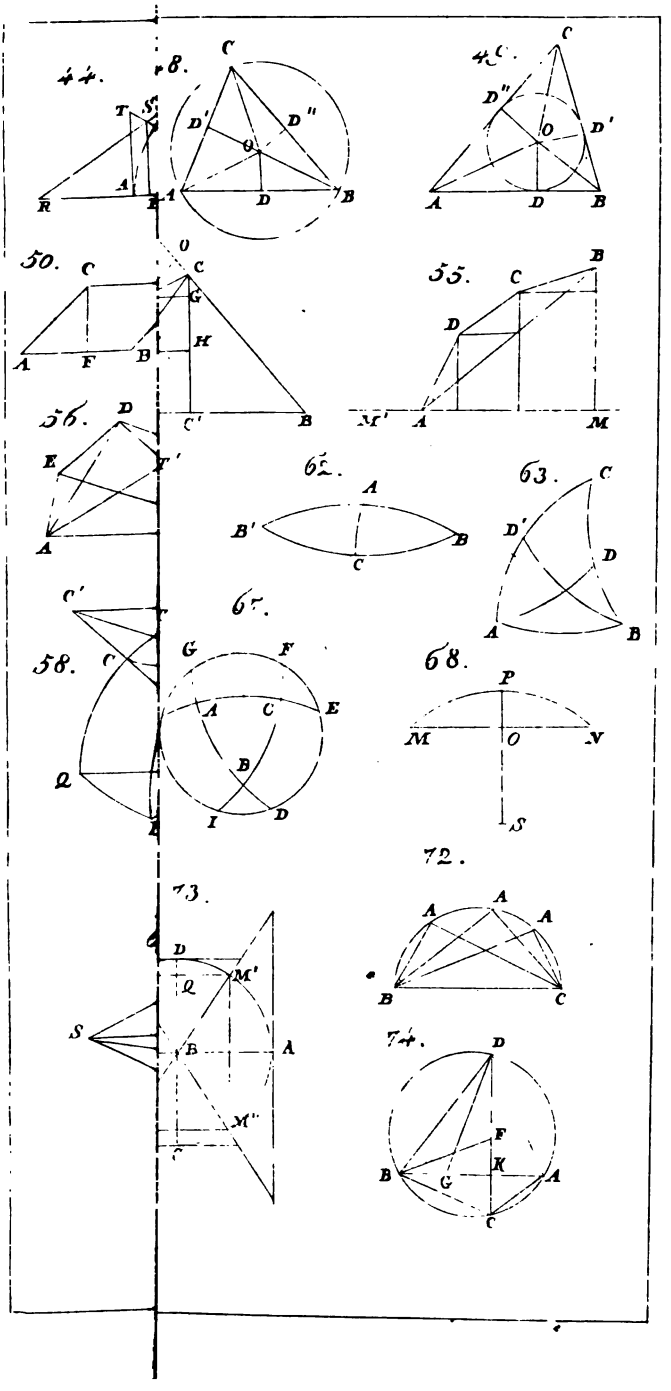
NOTE

Nota I. *Sopra il vocabolo* funzione : 312
Nota II. *Sopra l' omogeneità delle funzioni*. . . 313
Nota III. *Sopra la costruzione delle formule a due e tre dimensioni*. 321
Nota IV. *Sopra il concetto fondamentale della Trigonometria* 324
Nota V. *Sopra il seno-verso, ed il coseno-verso* . 328
Nota VI. *Sopra i segni delle rette trigonometriche*. 329

NOTA VII. *Sopra gli archi complementarj e supplementarj* 334
NOTA VIII. *Sopra i diversi archi che corrispondono ad una data retta trigonometrica* . . 336
NOTA IX. *Sopra le espressioni di* sen (a ± b), *e* cos(a ± b) 339
NOTA X. *Sopra alcune relazioni trigonometriche fra i tre angoli d' un triangolo* . . . 343
NOTA XI. *Sopra le formule che servono immediatamente alla risoluzione dei triangoli rettilinei* 344
NOTA XII. *Sopra alcune relazioni fra le rette trigonometriche d' un arco, e quelle della sua metà* 346
NOTA XIII. *Sopra alcune relazioni fra le rette trigonometriche di due archi, e quelle della loro somma e differenza* 351
NOTA XIV. *Sopra le relazioni dei seni e coseni d' un numero qualunque di angoli, ed i seni e coseni delle loro somme e delle loro differenze* 352
NOTA XV. *Sopra la conversione in parti del raggio d' un arco espresso in gradi* 356
NOTA XVI. *Sopra la conversione dei gradi sessagesimali in gradi decimali, e reciprocamente* 358


6.
A B
C D
E F
G H
M N
7.
A
G
H
E
F
I
B D C
M
B'
B N
C
15.
B
B'
P
A A' C
D N
16.
B
N D
A C A' P
B'
20.
B' M'
C T''
P' A T'
U''
U'
L' B'
B
21.
A N P' M P B
C D
A B
22.
A
B
C P' M P D
23.
M''
M'
M
N'' P'' N' P' N P A
29.
30.
M M
A B
Q Q
36.
B D
M
E K
I
A P H F C
37.
M
T N P B
M'
S'
D
F
Q
T'
G
N'
O
E
42.
T
S
C
B
R A H O
43.


44.
T
S
A
R
E
48.
C
D'
D''
O
A
D
B
49.
C
D''
O
D'
A
D
B
50.
C
A
F
B
O
C
G
H
C'
B
55.
B
C
D
M'
A
M
56.
D
E
T'
A
62.
A
B'
B
C
63.
C
D'
D
A
B
C'
58.
C
Q
E
67.
G
F
A
C
E
B
I
D
68.
P
M
O
N
S
72.
A
A
A
B
C
73.
D
M'
Q
S
B
A
M''
C
74.
D
F
K
B
G
A
C


44.
T
S
A
R
E
48.
C
D'
D''
O
A
D
B
49.
C
D''
O
D'
A
D
B
50.
C
A
F
B
O
C
G
H
C'
B
55.
B
C
D
M'
A
M
56.
D
E
F'
A
62.
A
B'
B
C
63.
C
D'
D
A
B
C'
58.
C
Q
E
67.
G
F
A
C
E
B
I
D
68.
P
M
O
N
S
72.
A
A
A
B
C
73.
D
M'
Q
S
B
A
M''
C
74.
D
F
B
G
K
A
C